

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

51e jaargang
1975/1976
no 4
december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 28,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.

Tarieven: 1/1 pag. *f* 250,—, 1/2 pag. *f* 135,— en 1/4 pag. *f* 75,—.

De complexe getallen

Een algebraïsch onderwerp op dood spoor

JOH. H. WANSINK

Arnhem

1. Aan de complexe getallen is in de loop der jaren in ons v.h.m.o. nauwelijks een bescheiden plaatsje gegund. Het onderwerp behoorde nimmer tot de verplichte leerstof, noch op de h.b.s., noch op het gymnasium.

Hoewel in het eerste eindexamenreglement voor de h.b.s. (1868) het onderwerp niet afzonderlijk vermeld stond (er werd nog in het geheel niet van verschillende getalsystemen gerept), krijgt men wel uit enkele eindexamenopgaven van de eerste jaren de indruk, dat bekendheid met complexe getallen bij de kandidaten toch wel aanwezig werd geacht (1).
Ook het normaalprogramma 1916 noemt het onderwerp nog niet.

In het wiskundeprogramma voor de h.b.s. van 1937 treffen we de volgende tirade aan: 'herhaling en uitbreiding van het getalbegrip', een formulering waarmee men alle kanten uitkon. Had men hiermee voor de hoogste klas kennismaking met de complexe getallen op het oog? De inspectie maakte duidelijk dat de interpretatie van dit voorschrift aan de leraar zelf overgelaten diende te worden. Deze mocht de complexe getallen behandelen, maar overtrad de voorschriften niet als hij zich tot het reële getallengebied zou wensen te beperken. Inspecteur Van Andel zei: 'Een behandeling van het complexe vlak, hoewel in sommige omstandigheden mogelijk, is nooit voor het gehele onderwijs voor te schrijven' (2).

In het wiskundeprogramma van 1958 blijft voor gymnasium en h.b.s. de algebra beperkt tot het reële getallensysteem.

De nieuwe programma's voor het v.w.o. van 1968 noemen voor *Wiskunde I* de verzameling van de reële getallen als verplicht onderwerp en nemen voor *Wiskunde II* de complexe getallen op in de lijst van keuzevakken.

2. In dit summiere overzicht van wettelijke voorschriften komen de tegenstellingen die er in de leraarswereld ten aanzien van de behandeling van complexe getallen op didactisch gebied hebben bestaan, nog niet naar voren. We noemen enkele naar voren getreden opvattingen.

a. In het rapport van de in 1915 ingestelde *commissie-Jensema* uitgebracht aan het Hoofdbestuur van de Vereniging van Leraren bij het Middelbaar Onderwijs wordt aanbevolen de complexe getallen 'zo eenvoudig mogelijk te doen behandelen', een formulering die de gangbare onderwijspraktijk op bevredigende wijze heeft kunnen dekken, maar die alle didactische problematiek ontweek (3).

b. In het *ontwerp Beth-Dijksterhuis* van 1926 wordt voorgesteld in de bovenbouw van de h.b.s. aan het getalbegrip speciale aandacht te besteden. Het vermeldde voor de vierde klas de theorie van het irrationale getal en stelde voor de vijfde klas een algebraïsche behandeling van het complexe getal voor (4).
De voorstellen van deze commissie hebben aanleiding gegeven tot uitvoerige discussies in de leraarswereld en zouden van invloed worden op het programma-1937. De gedachten van de commissie kwamen daar echter slechts partieel tot hun recht.

c. In het ontwerp-minimumprogramma voor het onderwijs in wiskunde aan de gymnasia en lycea dat in 1922 door *Liwenagel* ter discussie werd gesteld, vinden we uitdrukkelijk geformuleerd dat imaginairen en complexe getallen niet in het programma opgenomen dienden te worden. Aan de vooravond van het met ingang van 1935 ingestelde centraal schriftelijk eindexamen gymnasium werd door de desbetreffende inspectie bepaald, dat er op dat examen geen opgaven over complexe getallen zouden worden opgegeven (5).

d. In 1953 wees de Wiskunde-werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs in '*Het wiskunde-programma voor het v.h.m.o.*' op de didaktische problematiek rondom het onderwerp complexe getallen. Het rapport schrijft:
'Ten aanzien van het complexe getal is gebleken, dat het moeilijk is in het onderwijs op ongedwongen wijze tot toepassingen te komen, waarbij de waarde van deze uitbreiding van het getalbegrip duidelijk wordt. Anderzijds zijn ook geen toepassingen buiten de school (en zonder tussenkomst van een verdergaande wiskundige opleiding) bekend, waarbij de complexe getallen een rol spelen.
Maar aangezien de complexe getallen allesbehalve nutteloos zijn (zoals zovele andere onderdelen van het traditionele algebra-programma) en bovendien een logische afsluiting van het getalbegrip vormen, hebben we de complexe getallen als facultatief onderwerp gehandhaafd' (6).

e. De *Wimecos-leerplancommissie 1954–1958* besloot aanvankelijk de complexe getallen in haar voorstel tot programmaherziening op te nemen zonder het daarbij nodig te oordelen hiervoor in haar rapport nadere argumenten aan te voeren. Er rees in de leraarswereld echter spoedig verzet tegen de opname in het programma van dit onderwerp, waarvan in de onderwijspraktijk immers gebleken was dat men het wel kon missen. Men vreesde dat het naast het door de Commissie voorgestelde nieuwe vak statistiek aanleiding

zou geven tot ernstige overlading. Klachten over overlading waren trouwens sinds het tot stand komen van de h.b.s. nimmer van de lucht geweest. Het gerezen verzet leidde ertoe, dat de commissie in 1957 om de verdere voorstellen door haar gedaan te redden, besloot aan het verzet toe te geven door èn de statistiek èn de complexe getallen terug te nemen. De commissie vond het laten vallen van de complexe getallen niet catastrofaal (het laten vallen van de statistiek beschouwde ze wel als een verminking van het geformuleerde ontwerp-leerplan), omdat er ook zonder de complexe getallen voor de algebra een gaaf, afgerond, waardevol geheel zou overblijven (7).
De overige voorstellen van de commissie zou men een jaar later in het nieuwe leerplan-wiskunde voor h.b.s. en gymnasium terugvinden.

3. Om de standpunten die de Nederlandse wiskundeleraren in de honderd jaar dat de h.b.s. heeft bestaan enigszins te begrijpen, lijkt het me gewenst zo al niet noodzakelijk dat we kennis nemen van enige in gebruik geweest zijnde leerboeken en van didactische beschouwingen die over het onderwerp zijn gepubliceerd. We doen daarbij een beperkte keuze uit het beschikbaar zijnde materiaal.

Vanaf de stichting van de h.b.s. werd er aan het niet verplichte onderwerp complexe getallen in de algebraboeken aandacht besteed. In de eenvoudige verzameling '*Algebraïsche vraagstukken*' die Versluys in 1868 het licht deed zien (8), treffen we een zestal paragrafen aan over complexe getallen waarvan de laatste handelt over wortels uit complexe getallen. Hij staat echter kritisch en sceptisch tegenover dit onderdeel van het algebraonderwijs. Hij laat in zijn '*Methoden bij het onderwijs in de wiskunde*' (1874) uitkomen dat hij het onderwerp weliswaar belangrijker vindt dan bijvoorbeeld dat van de onbepaalde vergelijkingen, maar op grond van het abstracte karakter vindt hij '... het bedenkelijk, de behandeling van de complexe getallen in de leerstof ener hogereburgerschool op te nemen' (9).

Hoe de complexe getallen in de beginjaren van de h.b.s. gepre. enteerd werden illustreren we met een verwijzing naar het leerboek van Ninck Blok. Deze constateert in zijn in 1877 verschenen leerboek, dat er geen positief of negatief getal gevonden kan worden, waarvan het vierkant negatief is en dat men 'daarom' $\sqrt{-5}$ een onbestaanbaar getal noemt. Hij schrijft dan: 'Wij beschouwen bestaanbare en onbestaanbare getallen als ongelijksoortig, zodat wij ze dus nimmer tot één geheel kunnen verenigen. Beide worden met eenheden gemeten waartussen geen verband kan bestaan'. Toch wordt dan een paar regels verder de relatie $i^2 = -1$ afgeleid.

De complexe getallen bleven in de schoolboeken optreden, zelfs in de meest eenvoudige. We wijzen in dit verband op de '*Kern van de algebra*' van W. H. Wisselink, een boekje uit 1889 dat nog in 1925 door Wijdenes werd herzien. Er wordt ongeveer één bladzijde aan het onderwerp gewijd. In feite volstaat de auteur met de mededeling dat men $\sqrt{-1}$ de imaginaire eenheid noemt, waarvan we weten $(\sqrt{-1})^2 = -1$, om daarna een serie cijfervoorbeelden te geven.

Het is inderdaad mogelijk op deze wijze de leerlingen veel rekenwerk onder toepassing van de vanouds bekende rekenregels te doen uitvoeren, maar een en ander kan hoogstens leiden tot dril, waarbij van wezenlijk inzicht geen sprake kan zijn.

Waarvoor toch die vroegtijdige belangstelling voor 'imaginaire' getallen? Ik heb de indruk dat voorzover men zich gedrongen voelde tot enige rechtvaardiging de grond ervoor gevonden werd in het verlangen bij de behandeling van de vierkantsvergelijkingen aan elke vergelijking twee wortels te kunnen garanderen.

Men achtte zich op wetenschappelijke gronden hiertoe verplicht en vergat daarbij dat het juist vanuit wetenschappelijk standpunt volkomen geoorloofd was het aantal wortels van een vierkantsvergelijking te laten afhangen van de discriminant van die vergelijking, mits men daarbij maar zorgvuldig aangaf in welk getallensysteem men de oplossing wenste te vinden.

Een algebraonderwijs waarin men zich beperkt tot het systeem der reële getallen biedt voor jonge leerlingen wezenlijke voordelen, leidt tot een gaver geheel van kennis dan een onderwijs waarin een vreemde i onbegrepen jarenlang blijft voortspoken. Behandeling van het complexe getal verdient eerst overweging voor de bovenbouw van onze scholen, nadat de behandeling van het reële getal op verantwoorde wijze zijn beslag heeft gekregen.

De problematiek rondom de plaats van de complexe getallen in ons algebraonderwijs kwam in een nieuwe fase door de verschijning van het leerplanontwerp Beth-Dijksterhuis. Voor een nadere concretisering van de voorstellen zorgde Beth door de verzorging van een vervolgdeel op Wijdenes' *Nieuwe Schoolalgebra* van 1924 (10).
In het voorwoord van dit vierde deel (1930) geeft de auteur te kennen dat dit deel zijn ontstaan dankt aan de onvrede die er in onderwijskringen gegroeid was over een situatie waarbij de samengestelde interestrekening het einddoel van het algebra-onderwijs op de h.b.s. scheen te vormen en uit het verlangen om aan het functiebegrip de centrale plaats in ons algebra-onderwijs te geven die in het internationale hervormingsstreven van het eerste kwart van de twintigste eeuw paste.

Dat dit vierde deel van de Nieuwe Schoolalgebra onder de gemeenschappelijke namen van Wijdenes en Beth kon verschijnen kunnen we voor de laatste zien als het doortrekken van de lijn van zijn activiteiten als lid van de programmacommissie, voor de eerste moet het didactisch gezien een ommezwaai hebben betekend. Het vierde deel toch bevatte na een behandeling van de eerste beginselen van de differentiaal- en integraalrekening de voor het vierde leerjaar bestemde theorie van het irrationale getal en vervolgens voor het vijfde h.b.s.-leerjaar de behandeling van de complexe getallen. De theorie van het irrationale getal nu wordt ontwikkeld uitgaande van Dedekind's snedebegrip, terwijl verderop de irrationale getallen optreden als irrationale limieten van convergente varianten.

Men vraagt zich af, hoe Wijdenes deze leerstof in 1930 op didactische gronden heeft kunnen verdedigen. Enige jaren tevoren (in 1923) toch had hij in verband met de behandeling van de oppervlaktetheorie in de vlakke meetkunde nog geschreven:
'Verder negeer ik volkomen de onmeetbare verhoudingen, wat ieder moet toejuichen als een opluchting; het begrip onmeetbaar getal is géen stof voor onze h.b.s. en m.u.l.o.; ... velen van de docenten zijn zelf niet geheel vertrouwd met het begrip. Geen leerling denkt eraan en voelt een leemte, als men erover zwijgt ..., ook de meeste leraren niet' (11).
Voor het m.u.l.o.-onderwijs betekent de opvatting van 1930 t.o.v. de uitlating van 1923 geen ommezwaai; immers ook in de nieuwe opvatting werd de i voor de onderbouw van onze scholen prijsgegeven. Maar wat de bovenbouw betreft opent zich een afgrond tussen Wijdenes' opvattingen uit 1923 en die uit 1930.

Over de plaats van de complexe getallen in ons algebra-onderwijs is in de dertiger jaren door de leraren uitvoerig gediscussieerd. Een neerslag hiervan kan men o.a. vinden in de tiende jaargang van *Euclides* (1933–1934) (12).
Wijdenes stelde in een artikel met de titel 'i' voor de i uit de gehele schoolwiskunde te verbannen, tenzij er voor een niet al te oppervlakkige behandeling in de hoogste klas tijd gevonden zou kunnen worden. Dat was dus geheel in de geest van de voorstellen Beth-Dijksterhuis en van deel IV van zijn eigen Nieuwe Schoolalgebra. Hij geeft citaten uit een aantal schoolboeken en constateert dat de teksten, ook die van zijn eigen boeken, ongeschikt zijn voor leerlingen van een tweede klas.
Uit een niet-anonieme enquête over Wijdenes' voorstel blijkt, dat 30 leraren en hoogleraren hun instemming betuigden, terwijl 23 zich er tegen verklaarden. Schogt bewerkte de enquête en onderstreepte in zijn commentaar, dat beperking tot het reële getal leidt tot een afgesloten geheel dat wel voor aanvulling in in aanmerking kan komen, maar dat geen hinderlijke leemten vertoont.
Mannoury schrijft in een artikel over '*De bestaanbaarheid van* i', dat het jammer zou zijn, als de complexe getallen uit ons schoolonderwijs zouden verdwijnen. Hij analyseert een aantal nomenclatuurmoeilijkheden en tracht de lezer te overtuigen, dat de leerwijze van de complexe getallen via 'dubbelgetallen' zeer wel onderwezen kan worden zonder van dwaasheden als 'de vierkantswortel uit -1' uit te gaan. Hij schrijft 'liever geen i dan een onbestaanbare' en juicht de verdwijning van i uit de onderbouw van onze scholen in elk geval toe.

Als leidraad voor de discussies in de wereld van de wiskundedocenten die aan de totstandkoming van de programmaherziening 1937 voorafgingen, dient nog vermelding een door Wimecos onder zijn leden vertrouwelijk rondgezonden '*Leerplan en eindexamenprogramma voor de Wiskunde, voor de h.b.s. met 5-jarige cursus B*', in 1935 tot stand gekomen in overleg met inspecteur Van Andel (13). Het sloot nauw aan bij de voorstellen van de commissie Beth-Dijksterhuis, waarvan Van Andel trouwens zelf deel uitgemaakt had. In deze 'brochure' vinden we onder de algebra van de vijfde klas opgenomen: algebraïsche behandeling van het complexe getal. Voorts: behandeling der

complexe getallen in de gedaante $r(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$. Meetkundige betekenis der hoofdbewerkingen. Theorema van De Moivre voor gehele positieve waarden van de exponent. Goniometrische oplossing van binomiaalvergelijkingen.
Het resultaat van alle discussie en overleg is buitengewoon matig geweest. Zoals onder 1 reeds is meegedeeld bleven in 1937 de programmaeisen beperkt tot de vrijblijvende formulering: 'herhaling en uitbreiding van het getalbegrip'. Het onderwerp 'complexe getallen' bleef vanaf 1937 op dood spoor staan.

Hoofdbedoeling van de volgende paragrafen is nu de didactische betekenis van Beth's voorstellen uit 1926 en 1930 nader in het licht te stellen.

4. Beth's behandeling van het complexe getal neemt in de schoolboekliteratuur bijzondere plaats in, zowel door het door hem gekozen uitgangspunt als door de wijze van behandeling en omvang van de leerstof.
In het voetspoor van Hamilton (1805–1865) introduceert Beth de complexe getallen, niet door uit te gaan van de vierkantswortel uit -1 als imaginaire eenheid, maar door een beschouwing van getallenparen, waarvoor de gelijkheid en de bewerkingen van optelling en vermenigvuldiging nader worden gedefinieerd; vergelijk dit met Mannoury's dubbelgetallen. Door ook de reële getallen als getallenparen te noteren, waarbij het reële getal a als dubbelgetal $(a, 0)$ geschreven wordt, kan de auteur bewijzen, dat voor i, d.i. voor (0, 1) geldt: $\mathrm{i}^2 = -1$. In de gangbare definitie van i als het 'nieuwe' getal waarvoor geldt dat $\mathrm{i}^2 = -1$ placht men stilzwijgend voorbij te gaan aan de dubbelzinnigheid die er ten aanzien van i in deze definitie nog besloten lag. Er zijn immers twee niet-reële getallen waarvan het kwadraat gelijk is aan -1, de getallen (0, 1) en (0, -1).
Beth past evenals andere auteurs de ontwikkelde theorie toe op de vierkantsworteltrekking en op de oplossing van de vierkantsvergelijkingen, bespreekt daarna de meetkundige voorstelling van de complexe getallen en leidt de stelling van De Moivre (1667–1754) af met toepassing op de binomiaalvergelijkingen.

Van wezenlijk belang is hierbij de tweevoudige manier waarop complexe getallen kunnen worden voorgesteld:
a. als punten in het Gaussische vlak, waarbij het complexe getal (a, b), dat is $a+b\mathrm{i}$, wordt gerepresenteerd door het punt met rechthoekige coördinaten a en b;
b. als punten bepaald in dat vlak door modulus r en argument φ waarbij we de volgende relatie vinden:

$$a+b\cdot\mathrm{i} = r(\cos\varphi+\mathrm{i}\cdot\sin\varphi)$$

met $r = \sqrt{(a^2+b^2)}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ en $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

Deze laatste voorstelling kan aanleiding geven tot de beschouwing van meervoudig gelaagde vlakken!

De tot zover aangegeven leerstof verschilt nog niet wezenlijk van de traditionele die we in andere leerboeken aantreffen. Wel zijn er tal van auteurs die zich contenteren met een toepassing van de complexe getallen op de oplossing van vierkantsvergelijkingen. Met de eigenschap dat elke vierkantsvergelijking twee wortels heeft, hebben zij hun einddoel bereikt.

Een wezenlijk verschil ten aanzien van alle andere Nederlandse auteurs van schoolboeken treedt echter op bij het sluitstuk van Beth's beschouwingen, gewijd aan de meetkundige transformaties van figuren die tot stand kunnen komen door lineaire afbeeldingen van het complexe vlak.

Beth beschouwt eerst de translatie:

$$z' = z + a.$$

Daarna de homothetie:

$$z' = az \text{ (met reële } a\text{)}.$$

Vervolgens de rotatie:

$$z' = z \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

en de superponering van rotatie en vermenigvuldiging:

$$z' = a \cdot z, \text{ nu met } a \text{ complex}$$

De meetkundige betekenis van de laatste afbeelding komt het eenvoudigst tot zijn recht, als we z en a schrijven met modulus en argument.

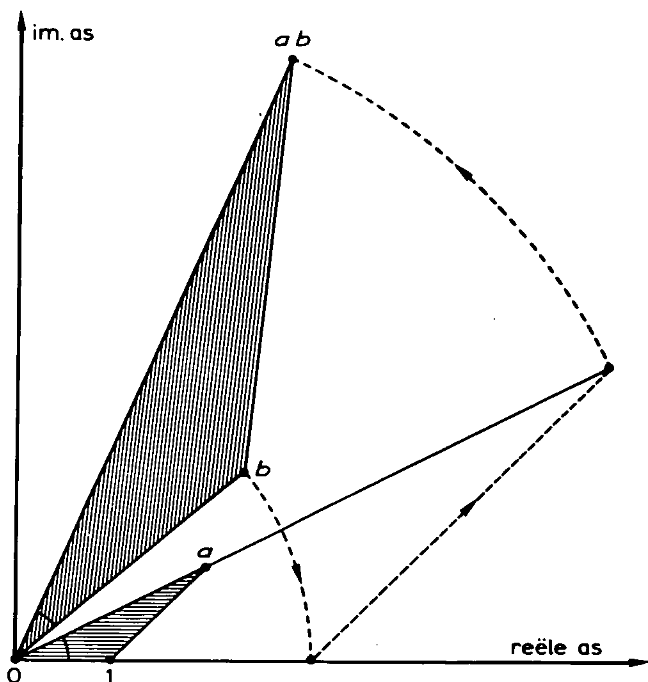


Fig. 1.

Voor $a = r_1(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ en $b = r_2(\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$ laat zich het produkt $a \cdot b$ gemakkelijk herleiden tot:

$$a \cdot b = r_1 r_2(\cos \overline{\alpha+\beta} + i \cdot \sin \overline{\alpha+\beta}).$$

We lezen hieruit de volgende fundamentele eigenschap af:
de modulus van het produkt is het produkt van de moduli van de factoren en het argument van het produkt is de som van de argumenten van die factoren.

In fig. 1 is het beeld van $a \cdot b$ langs meetkundige weg (zonder berekeningen) gevonden; de constructielijnen zijn aangegeven. Fig. 2 berust op berekening; bij $a = 2+i$ en $b = 1+3i$ vinden we $a \cdot b = -1+7i$.
De constructie van fig. 1 berust op de eigenschap, dat we het beeld van $a \cdot b$ uit dat van b kunnen krijgen door dat van b over een hoek α te roteren en daarna de geroteerde figuur met modulus a te vermenigvuldigen.

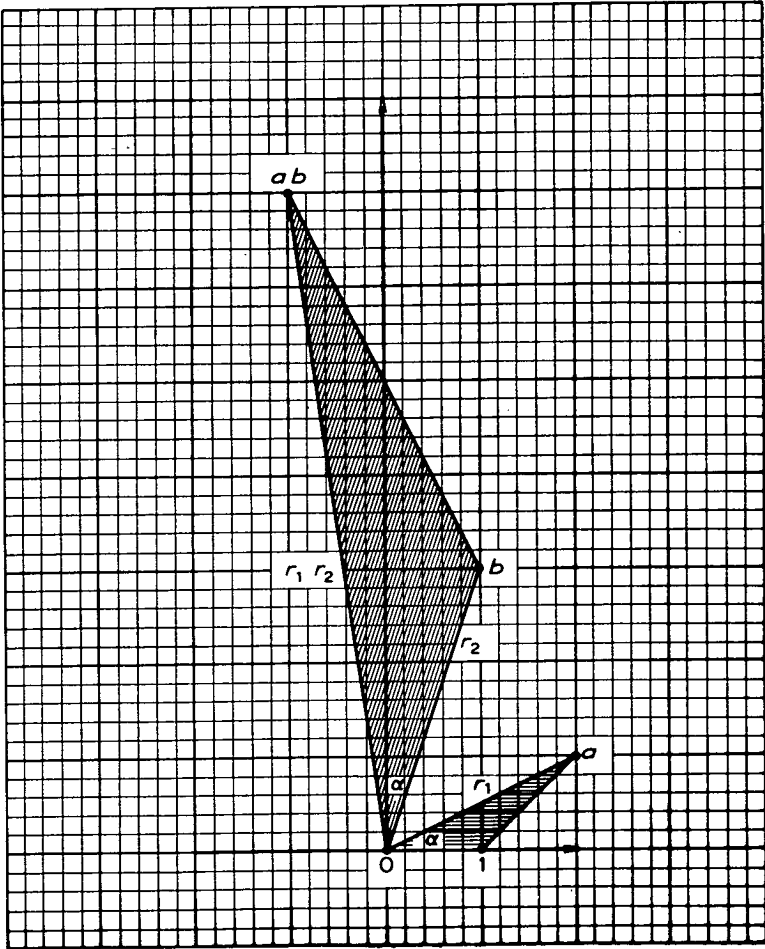


Fig. 2.

In fig. 1 en fig. 2 geldt, dat de driehoek met de beeldpunten van 0, b en ab als hoekpunten gelijkvormig is met de driehoek die de beeldpunten van 0, 1 en a tot hoekpunten heeft; de gelijkvormigheidsfactor is r_2, de modulus van b.

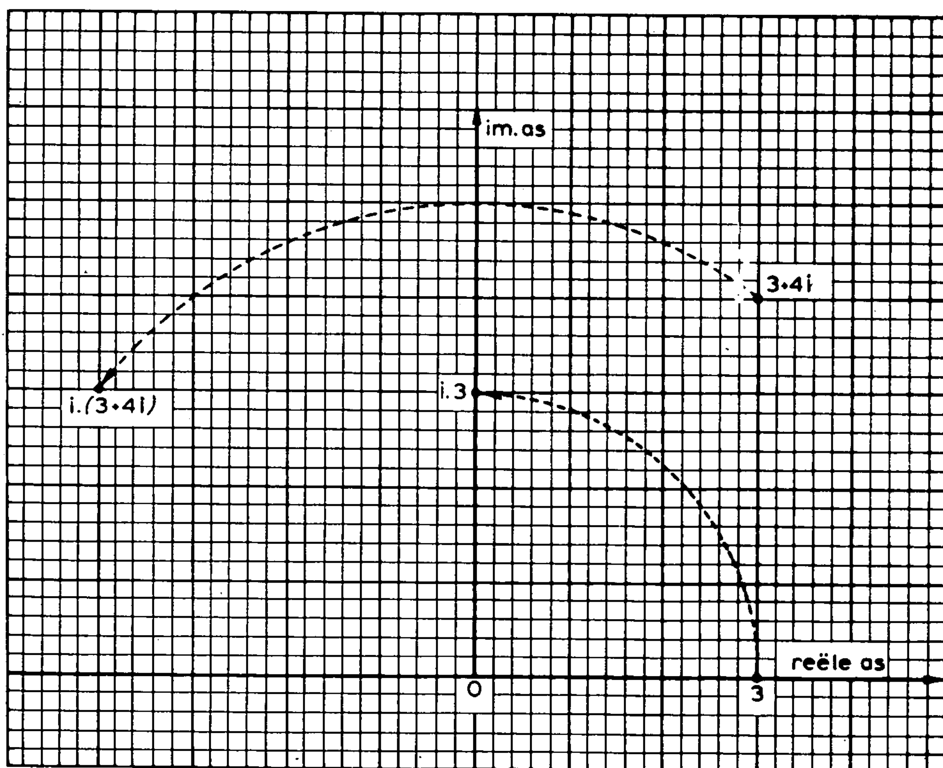
Bij de afbeeldingen $z' = az+b$ wordt aan de tot dusver beschouwde transformaties nog een translatie bepaald door b toegevoegd.
We wijzen erop, dat bij alle afbeeldingen $z' = az+b$ in het beeldvlak alleen figuren ontstaan die rechtstreeks gelijkvormig zijn met de grondfiguur. Beelden die indirect congruent zijn ten opzichte van de grondfiguur treden hierbij niet op.

5. In fig. 3, a, b, c en d illustreren we, dat vermenigvuldiging met i meetkundig correspondeert met een rotatie over een kwart van een volle hoek. Ze brengen in beeld de vermenigvuldiging van het getal 3 en van het getal 3+4i met i. Tevens zien we uit de figuren:

$$i^2 = -1 \quad \text{en} \quad i^3 = -i.$$

De in deze fase van ons onderwijs eenvoudige waarheid, dat in de meetkundige afbeelding het beeld van $i \cdot a$ verkregen kan worden door dat van a over een kwart van een volle hoek te roteren, komt in populaire boeken over wiskunde

Fig. 3a.



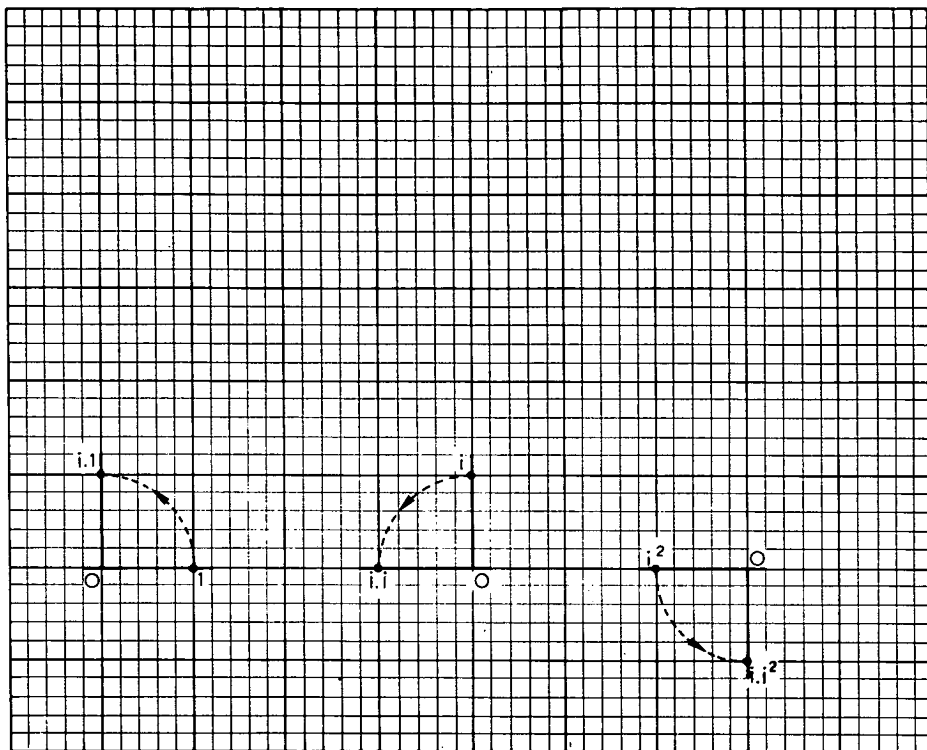


Fig. 3. (b) (c) (d)

vaak uiterst moeizaam dan wel abrupt naar voren. Aan invoering van het operatorbegrip naast het getalbegrip zoals we dit in sommige populariseringen terwille van het begrijpelijk maken van het symbool i wel aantreffen, hebben we voor onze schoolalgebra geen behoefte.

6. In een schets van de plaats die de complexe getallen de facto in ons v.h.m.o. hebben ingenomen, dient naar mijn mening ook enige aandacht geschonken te worden aan de afwijkende wijze waarop de auteurs Derksen en De Laive in 1899 in hun *Leerboek der Algebra* deze complexe getallen introduceerden (14).
Ze gingen daarbij uit van een voorstelling met modulus en argument en spraken in eerste instantie van richtingsgetallen.

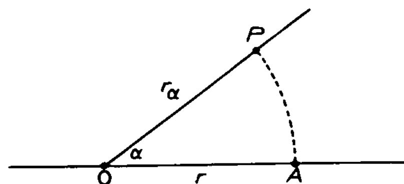


Fig. 4.

De verwantschap met het vectorbegrip, waarbij de vectoren in poolcoördinaten worden gegeven, springt hierbij in het oog.
Eerst in tweede instantie schrijven de auteurs hun richtingsgetallen in de vorm $a+b \cdot \mathrm{i}$ en weer later als $r \cdot (\cos\alpha+\mathrm{i}\cdot\sin\alpha)$.

Speciale aandacht verdient de wijze waarop deze auteurs het produkt van twee complexe getallen definieerden: meetkundig en niet algebraïsch.
Ze verstaan onder het produkt van a_α en b_β het richtingsgetal dat uit b_β 'op dezelfde wijze' wordt verkregen als waarop het richtingsgetal a_α uit dat van de numerische eenheid verkregen is.
Uit deze meetkundige interpretatie leiden de auteurs dan af:

$$a_\alpha \cdot b_\beta = (a \cdot b)_{\alpha+\beta}$$

Deze meetkundige fundering van de definitie van het produkt van twee complexe getallen beschouw ik als een Schönheitsfehler in de aritmetische opbouw van de theorie. Didaktisch beschouwd verdient de methode-Beth waarin de bedoelde eigenschap op eenvoudige wijze te voorschijn komt als resultaat van een aritmetisch opgezette theorie de voorkeur. De afleiding daar verloopt buitengewoon eenvoudig.

De meetkundige aanpak van Derksen en De Laive zou ons hebben doen verwachten dat juist zij oog zouden hebben gehad voor de meetkundige toepassingen van het onderwerp 'complexe getallen', in het bijzonder voor de meetkundige transformaties die via de lineaire transformaties in $\mathbb{C}$ tot stand kunnen worden gebracht. Beth sloot zijn behandeling ermee af, bij Derksen en De Laive vinden we van deze toepassingen geen spoor.

7. Achteraf beschouwd lijkt het me te betreuren dat Beth, die zijn hoofdstuk over complexe getallen schreef vier jaren nadat in 1926 het voorstel was gedaan de complexe getallen tot verplichte leerstof voor de h.b.s.-B te maken, destijds met zijn initiatief geen succes heeft gehad. Op de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in de jaren tussen de beide wereldoorlogen zouden Beth's opvattingen in deze een gunstige invloed hebben kunnen uitoefenen. Zijn aanpak zou hier te lande hebben kunnen leiden tot een verhoogde belangstelling voor het onderwerp meetkundige transformaties. Deze belangstelling was in de kringen van het v.h.m.o. uiterst gering. Te gemakkelijk huiverde men trouwens terug voor wijzigingen in het leerplan die door opname van voorheen niet-verplichte onderwerpen taakverzwarend dreigden te worden en het spookbeeld van de overlading gemakkelijk deden rijzen.
In het doodbloeden van Beth's initiatief zie ik een gemiste kans voor een gunstige beïnvloeding van ons wiskundeleerplan in de vooroorlogse periode. De brug die toen geslagen had kunnen worden tussen het algebra-onderwijs enerzijds en het meetkunde-onderwijs anderzijds kwam niet tot stand.

Is er op dit ogenblik, bijna een halve eeuw later, nog behoefte aan de brug die Beth in 1930 graag had willen slaan? De situatie is in ons wiskunde-onderwijs

door de vaste plaats die de transformaties in onze schoolwiskunde hebben weten te veroveren, grondig gewijzigd. De behoefte om althans via de afbeeldingen de leerlingen enigszins met die transformaties vertrouwd te doen worden, is er thans niet. Maar de destijds gemiste brugverbinding heeft zijn didactische betekenis geenszins verloren. En voor leerlingen die dieper op de stof willen ingaan en die met het lichaam van de complexe getallen vertrouwd zijn gemaakt, lijkt het me zinvol om de in 1930 gemiste brug toch nog te passeren.
Zie in dit verband het in paragraaf 11 te noemen IOWO-experiment. Beth's behandeling van de complexe getallen sloot aan bij in Duitsland gehuldigde opvattingen. Men vergelijke zijn voorstel bijvoorbeeld met het in de *Richtlijnen van de Pruisische Leerplannen* van 1925 aanbevolen onderwerp: '*Einfache Abbildungen durch Funktionen komplexer Variablen*'.

8. De vraag rijst, of het overweging verdient onder de eenvoudige afbeeldingen waarvan de Pruisische Richtlijnen gewaagden, ook nog andere afbeeldingen te begrijpen dan die welke Beth in het vierde deel van de Schoolalgebra heeft opgenomen.
We hebben er reeds op gewezen dat in de verzameling van de door $z' = az+b$ bepaalde transformaties de spiegeling ontbrak. We kunnen deze echter toch op de volgende wijze een plaats geven in een nog als 'eenvoudig' te kwalificeren programma.

We beschouwen daartoe allereerst het aan z toegevoegde complexe getal $\bar{z}$.

Bij $z = a+bi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

behoort:

$$\bar{z} = a-bi = r(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi).$$

De afbeelding die aan z het 'toegevoegd complexe getal' $\bar{z}$ toevoegt betekent dus meetkundig een spiegeling ten opzichte van de reële as.

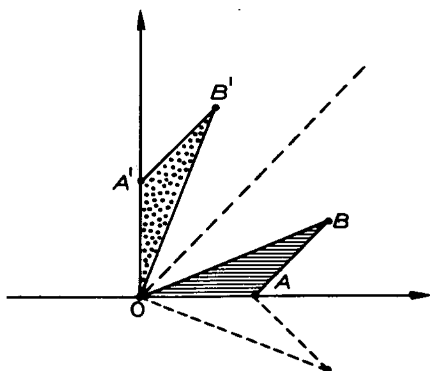


Fig. 5.

Hieruit volgt, dat

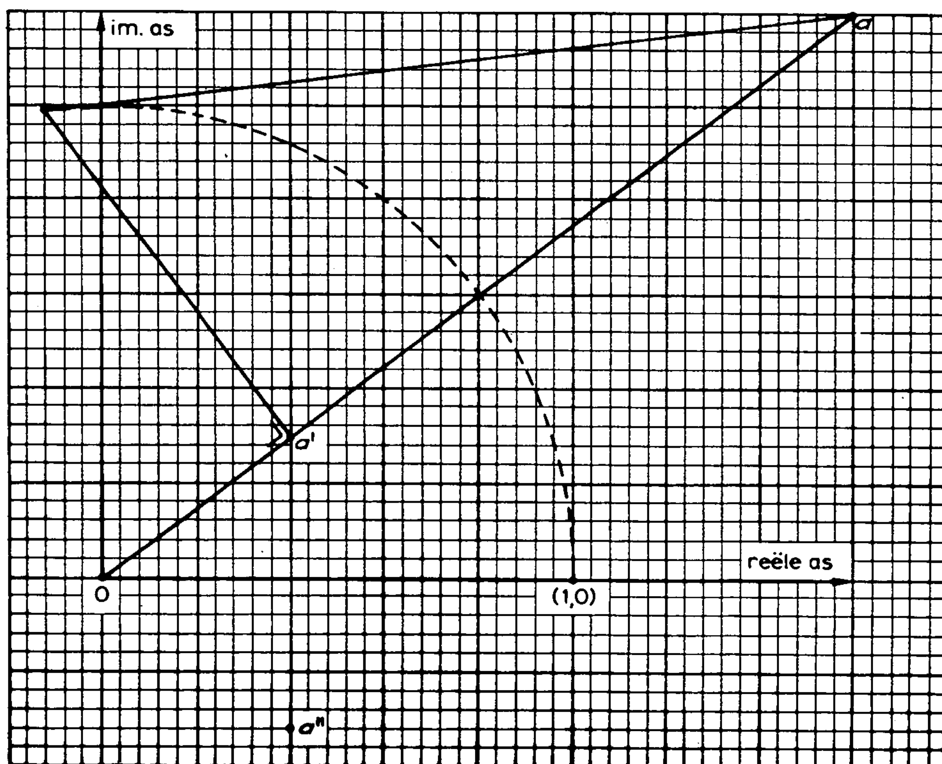
$$z' = a\bar{z}$$

(met modulus a gelijk aan 1) in het Gaussische vlak een figuur doet overgaan in de over een hoek α (argument van a) geroteerde spiegeling van de grondfiguur ten opzichte van de reële as.
In fig. 5 is het beeld geconstrueerd van $\triangle OAB$ door de beschouwde transformatie met $a = \cos\frac{1}{2}\pi + i \cdot \sin\frac{1}{2}\pi$.
De beeldfiguur is de met $\triangle OAB$ symmetrische figuur $\triangle OA'B'$

De verzameling van de transformaties bepaald door $z' = az+b$ vormen een groep, de verzameling bepaald door $z' = a\bar{z}+b$ niet; beide verzamelingen samen, bepaald door $z' = az+b$ of $z' = a\bar{z}+b$ wel: de homometrische groep.

9. Een volgende nog als eenvoudig te kwalificeren uitbreiding van ons werkprogramma wordt verkregen door introductie van *de gebroken lineaire functie.* Van de afbeelding door middel van hogeregraadsfuncties zullen we in onze schoolwiskunde stellig moeten afzien, omdat ze ons voeren tot de beschouwing van meervoudig gelaagde Riemannse vlakken.

Fig. 6.



De eenvoudigste gebroken lineaire functie is:

$$z' = \frac{1}{z}.$$

In modulus-argument notatie betekent dit:

$$r'_{\varphi'} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi).$$

De hierdoor gedefinieerde meetkundige afbeelding bestaat uit de superponering van een spiegeling ten opzichte van de reële as en een inversie.
In fig. 6 is voor a gekozen het complexe getal $1{,}6+1{,}2\cdot i$;

$a'(0{,}4+0{,}3\cdot i)$ is het inverse punt t.o.v. de eenheidscirkel,

$a''(0{,}4-0{,}3\cdot i)$ het spiegelpunt van a' t.o.v. de reële as;

Door $z' = \frac{1}{z}$ gaat a over in a''.

Bij invoering van de gebroken functie is het niet meer nodig terwille van de spiegeling een beroep te doen op de toegevoegd complexe waarde $\bar{z}$ van z.

Door de introductie van de inversie zijn we met bovenstaande afbeelding duidelijk terechtgekomen buiten de traditionele meetkunde van het vhmo. We wijzen er echter op, dat de inversie lange jaren een geliefkoosd onderwerp is geweest bij de studie voor de akte wiskunde l.o., oude stijl, zodat het m.i. destijds zinvol geweest zou zijn de hierboven beschouwde lineair-gebroken functie in ℂ in genoemde studie te incorporeren.

Wat de huidige situatie betreft is het duidelijk, dat het onderwerp complexe getallen niet in aanmerking komt om opgenomen te worden in het wiskundeprogramma voor *Wiskunde I.* Het figureert echter wel in de lijst van de keuzevakken voor *Wiskunde II.* Daar zal stellig gelegenheid zijn op het onderwerp dieper in te gaan dan in het vhmo ooit het geval geweest is en verdient het m.i. aanbeveling te overwegen in hoeverre eenvoudige afbeeldingen door middel van functies van complexe variabelen behandeling verdienen.

Ter karakterisering van de typen vraagstukken die bij de behandeling op school in aanmerking zouden kunnen komen, verwijzen we naar de opgaven die in deel IV van de '*Nieuwe Schoolalgebra*' werden opgenomen maar daarnaast naar een twaalftal opgaven van jongere datum, opgaven gesteld in 1968 bij de Franse *Baccalauréat*-examens (16).

10. Voor de leerlingen die zowel het onderwerp complexe getallen als de vectormeetkunde bestudeerd hebben, zijn de volgende aspecten misschien van enig belang.

a. De verleiding is groot om bij de meetkundige voorstelling van het complexe

getal $a_1 + a_2 \cdot \mathrm{i}$ het lijnsegment OA te vervangen door de pijl OA, waardoor de vectorvoorstelling gaat domineren.
We kunnen elk complex getal laten corresponderen met een vector en daarbij beide bepalen door eenzelfde geordend getallenpaar, zij het dan dat we wellicht bij de complexe getallen de elementen naast elkaar noteren, bij vectoren de kentallen onder elkaar:

$$(a_1, a_2) \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

b. Er is volkomen paralleliteit tussen de optelling van complexe getallen in het Gaussische vlak en de optelling van vectoren in het vectorvlak. Zowel bij complexe getallen als bij vectoren is de som van de door (a_1, a_2) en (b_1, b_2) bepaalde elementen aan te geven door:

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Analoog voor de aftrekking.

c. Bij de vermenigvuldiging is die paralleliteit verdwenen.

Het lijkt me echter verantwoord, zowel bij de complexe getallen als bij de vectoren, de vermenigvuldiging in te leiden met het formele proces van vermenigvuldiging volgens de 'vanouds bekende' rekenregels.

Voor de complexe getallen a en b vinden we dan als produkt:

$$(a_1 + a_2 \cdot \mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2 \cdot \mathrm{i}) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \mathrm{i} + a_2 b_2 \cdot \mathrm{i}^2 \qquad \text{(I)}$$

Voor de vectoren

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 \quad \text{en} \quad \bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2$$

vinden we:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 \cdot \bar{e}_1{}^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot \bar{e}_1 \bar{e}_2 + a_2 b_2 \cdot \bar{e}_2{}^2 \qquad \text{(II)}$$

De rechterleden van de onder I en II gevonden gelijkheden zijn echter vooralsnog zinloos! Nadere afspraken zijn noodzakelijk om vast te stellen, wat we bij I onder i^2, en wat we bij II onder $\bar{e}_1{}^2$, onder $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$ en onder $\bar{e}_2{}^2$ zullen verstaan.
Stellen we nu formeel vast:

$$\mathrm{i}^2 = -1 \text{ naast } \bar{e}_1{}^2 = \bar{e}_2{}^2 = +1 \text{ en } \bar{e}_1 \bar{e}_2 = 0,$$

dan wordt het noodzakelijk dat we de schijnbare willekeur van deze afspraken achteraf rechtvaardigen door te laten zien, dat ze functioneren in het systeem dat we met behulp van deze afspraken opbouwen.

Wat de complexe getallen betreft leert de latere theorie, dat in de meetkundige voorstelling vermenigvuldiging met i correspondeert met een rotatie over een kwart van een volle hoek, i^2 met een rotatie over twee kwarten van een volle hoek, dat is over een halve hoek, evenals vermenigvuldiging met -1. Hierdoor is de afspraak $i^2 = -1$ in de opbouw van het systeem achteraf gerechtvaardigd.

Om de afspraken ten aanzien van de produkten van de eenheidsvectoren achteraf te rechtvaardigen gaan we de betekenis van de uitdrukkingen $\bar{e}_1{}^2$, $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$ en $\bar{e}_2{}^2$ na wanneer we deze opvatten als skalaire produkten. Door de drie grillige definities gaat het produkt $a \cdot b \cdot$ over in $a_1 b_1 + a_2 b_2$. We noemen deze getalwaarde het *skalair produkt* van de beide vectoren en we kunnen nu uit de af te leiden eigenschappen inzake orthogonaliteit en normbegrip laten zien, dat de drie afspraken passen in de theorie, indien we de uitdrukkingen $\bar{e}_1{}^2$, $\bar{e}_2{}^2$ en $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2$ ook als skalaire produkten opvatten.

$$\bar{e}_1{}^2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = (1, 0) \cdot (1, 0) = 1$$
$$\bar{e}_2{}^2 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1$$
$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0.$$

De norm van de beide eenheidsvectoren is ook 1.

Ten slotte wijzen we erop dat de latere theorie leert:

$$(a \perp b) \Leftrightarrow (a \cdot b = 0)$$

Welnu, de eenheidsvectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$ zijn orthogonaal en dit correspondeert met het 0 zijn van hun skalair produkt.

De grillige afspraken blijken dus achteraf goed in het opgebouwde systeem te functioneren.

d. De lineaire afbeeldingen in het complexe gebied leiden op eenvoudige wijze tot enige *transformatiematrices*.
De vermenigvuldiging van $x_1 + x_2 \cdot i$ met $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ geeft voor de coördinaten x_1 en x_2 van het corresponderend beeldpunt door simpele vermenigvuldiging:

$$x_1' = x_1 \cdot \cos\varphi - x_2 \cdot \sin\varphi$$

$$x_2' = x_1 \cdot \sin\varphi + x_2 \cdot \cos\varphi$$

waarmee de rotatiematrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{d.i.} \quad \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad \text{met } c^2 + s^2 = 1$$

is gevonden.

Evenzo is de translatiematrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \end{pmatrix}$$

voor een translatie over de vector $\bar{t} = t_1 \cdot \bar{e}_1 + t_2 \cdot \bar{e}_2$ onmiddellijk duidelijk. En voor de verzameling van de uit rotaties en translaties samengestelde congruentiegroep:

$$\begin{pmatrix} c & -s & t_1 \\ s & c & t_2 \end{pmatrix}.$$

Bij de spiegeling t.o.v. de reële as behoort de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Combinatie met de rotatie bepaald door $z' = a\bar{z}$ (modulus $a = 1$, argument α) leidt tot de matrix:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Superponering van spiegeling t.o.v. de reële as en rotatie over een hoek α leidt tot een spiegeling van de grondfiguur t.o.v. de lijn door O die met de reële as een hoek van $\frac{1}{2}\alpha$ maakt.

11. In de voorafgaande paragrafen is nagegaan, welke plaats de complexe getallen in het verleden hebben ingenomen in het algebra-onderwijs hier te lande. De ontwikkeling in het Nederlandstalige onderwijs in België bleef buiten beschouwing. Volledigheidshalve stippen we hier echter nog wel kort aan, hoe de situatie in België er uit ziet onder Papy's pogingen tot didactische bourbakinisering van het wiskunde-onderwijs (15).

Ook Papy weert de complexe getallen uit de onderbouw (lagere cyclus) van het middelbaar onderwijs. In deze cyclus maken de leerlingen van 12–15 jaar kennis met het euclidisch vlak π_0, dat is met een van een inprodukt voorziene tweedimensionale vectorruimte.

In de hogere cyclus bestuderen nu de leerlingen achtereenvolgens de lineaire transformaties in $\mathbb{R}$, matrices en determinanten en diverse eigenschappen van het euclidische vlak. Daarna komen aan de orde de groep van de orthogonale transformaties in het euclidisch vectorvlak en het lichaam van de directe gelijkvormigheden. Eerst daarna is er plaats voor een behandeling van de complexe getallen, waarvan het lichaamskarakter wordt aangetoond èn de isomorfie met het lichaam van de directe gelijkvormigheden.
i wordt daarbij ingevoerd voor de rotatie over een kwart van een volle hoek in een georiënteerd vlak, in tegenwijzerzin.

Voor een orthonormale basis $\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$ geldt nu $\bar{e}_2 = \mathrm{i} \cdot \bar{e}_1$ (of $\bar{e}_1 = \mathrm{i} \cdot \bar{e}_2$).

Aan het slot van deze beschouwingen wordt de leerling geconfronteerd met de schrijfwijze $a+b\cdot \mathrm{i}$ voor de complexe getallen.

12. De bedoeling is geweest te doen uitkomen, hoe in de loop van de jaren de complexe getallen in het Nederlandse onderwijs op dood spoor zijn geraakt. Voorstellen om aan dit onderwerp weer een plaats in ons onderwijs te geven, treft men er niet in aan. De vraag, hoe dit wel zou kunnen gebeuren, met name als keuze-onderwerp voor Wiskunde II, is een vraag waarop eerst een bevredigend antwoord gegeven zal kunnen worden na verantwoorde didactische experimenten te dezer zake.
Eén experiment is bereids tot stand gekomen, in de sfeer van het IOWO te Utrecht, als we althans de handleiding '*Complexe getallen*' van Freudenthal en Nijdam die een paar jaar geleden is verschenen, als zodanig mogen opvatten. Een didactisch onderzoek dat in brede kring aanleiding gegeven heeft tot nader overleg, is het in elk geval wel geweest. De handleiding stimuleerde door de keuze van de leerstof en door de toepassingen tot het betreden van eertijds bij het v.h.m.o. onbekende paden, terwijl toch bij de opvattingen van weleer aansluiting werd gezocht. Een verslag over de opgedane ervaringen is voorzover mij bekend nimmer verschenen.
Wel worden we over de opgedane ervaringen enigszins ingelicht, doordat de genoemde handleiding in 1974 werd omgewerkt tot een leerboekje '*Complexe getallen*', dat als derde, geheel herziene druk in de handel werd gebracht en in opdracht van het IOWO verzorgd werd door de Stichting IVIO te Lelystad.

We laten hier de volledige inhoudsopgave volgen.

HOOFDSTUK 4. *Gebroken Lineaire Afbeeldingen*
4.1. De Lineaire Afbeelding f: $z \rightarrow \alpha z$
4.2. De Functie f: $z \rightarrow \frac{1}{z}$
4.3. Gebroken Lineaire Afbeeldingen
4.4. De Groep der Gebroken Lineaire Afbeeldingen
4.5. Een Homomorfisme
4.6. Samenvatting hoofdstuk 4

HOOFDSTUK 5. *Exponentiële Functies*
5.1. Eigenschappen van Reële Exponentiële Functies
5.2. Algemene Invoering van Exponentiële Functies
5.3. De Formule van Euler
5.4. De Afbeelding f: $z \rightarrow e^z$
5.5. De Afbeelding f: $z \rightarrow z^n$
5.6. Samenvatting hoofdstuk 5

HOOFDSTUK 6. *Elektrische Trillingsketens*
6.1. De Harmonische Trilling
6.2. Stroomkring met zelfinductie
6.3. Stroomkring met Condensator
6.4. De Wet van Ohm
6.5. De Energieafgifte van een Elektromotorische Bron
6.6. Samenvatting hoofdstuk 6

HOOFDSTUK 7. *Gedempte Trillingen*
7.1. De Mathematische Slinger
7.2. De Vrije Trilling
7.3. De Gedwongen Trilling
7.4. Samenvatting hoofdstuk 7

Een ambitieus programma, dat leerstofonderdelen en toepassingen omvat, waaraan in verband met de vigerende programma's van weleer auteurs in 1930 en 1955 niet zouden hebben kunnen denken. De stelselmatige en overzichtelijke indeling van de behandelde stof maakt dat het leerboekje zich gunstig onderscheidt van de handleiding waarmee de auteurs een paar jaar geleden hun opvattingen ingang wilden doen vinden.
Duidelijk is in dit leerboekje een stuk propaedeutische leerstof opgenomen, wat tot een betrekkelijk hoog niveau van behandeling heeft geleid. Van doorslaggevend bezwaar behoeft dit niet te zijn, als men in aanmerking neemt, dat het onderwerp 'Complexe getallen' alleen in aanmerking kan komen als keuze-onderwerp voor Wiskunde-II en daar dus bestudeerd zal worden door een selecte groep van leerlingen.

Om de bedoelingen van het IOWO met deze uitgave zo goed mogelijk tot hun

recht te doen komen citeren we hier tot slot nog de voornaamste mededelingen uit het voorwoord.

'Na een tweejarig gebruik van de eerste versie van 'Complexe Getallen' werden op de leraarsbijeenkomsten ter uitwisseling van ervaringen met het boek ondermeer als kritiek geuit:

- de tekst is te compact geschreven;
- de stof is te omvanrijk voor ± 40 lesuren. Men komt niet toe aan de hoofdstukken met toepassingen;
- er is een tekort aan eenvoudige opgaven;
- men zou zich moeten beperken tot één manier van introductie van de complexe getallen;
- soms worden er begrippen uit de overige wiskundeleerstof bekend verondersteld als die in de les nog niet behandeld zijn.

Om in een volgende druk van 'Complexe Getallen' zoveel mogelijk tegemoet te komen aan de genoemde bezwaren tegen de oorspronkelijke tekst werd in een kleine groep van gebruikers een nieuwe opzet doorgesproken. Bert Nijdam herschreef daarop de tekst, gaf de manuscripten ter lezing aan de leden van de groep en verwerkte hun commentaren en suggesties ter verbetering in zijn manuscript tot het voor u liggende boek.

In het inleidende hoofdstuk wordt van een complex getal zijn voorstelling door $a+ib$, zijn poolvoorstelling en zijn meetkundige voorstelling in het vlak besproken. De basisbewerkingen optellen en vermenigvuldigen worden heuristisch ingevoerd, terwijl er gewezen wordt op het verband met transformaties in het vlak.

In hoofdstuk 2 wordt duidelijk gemaakt dat het systeem der complexe getallen met de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen een lichaam is, dat isomorf is met $\mathbb{R}^2$ met de gewone vectoroptelling en een zekere vectorvermenigvuldiging. De hier geïntroduceerde begrippen groep, lichaam en homomorfisme spelen alleen in hoofdstuk 4 weer een rol.

Men kan zonder bezwaar van hoofdstuk 1 op hoofdstuk 3 overstappen. Hierin wordt het afbeeldingskarakter van enkele eenvoudige complexe functies besproken. Er wordt nog even ingegaan op de afgeleide van een complexe functie. Ook de differentieerbaarheid van een functie wordt aan de hand van enkele voorbeelden besproken.

In hoofdstuk 4 vindt een uitgebreide behandeling plaats van de gebroken lineaire functies. Hierbij wordt veel gebruik gemaakt van de vaste Wiskunde-II-stof, bijvoorbeeld: lineaire afbeeldingen, matrices, de corresponderende afbeeldingen in het platte vlak, zoals rotaties, translaties en draaivermenigvuldigingen. Om dit hoofdstuk te kunnen behandelen moeten de drie voorafgaande de revue zijn gepasseerd.

Voor hoofdstuk 5 zijn uit dit boek alleen de hoofdstukken 1 en 3 als voorkennis vereist. Wel is het gewenst dat de reële exponentiële functies bekend zijn en dat men weet wat een differentiaalvergelijking is. Men kan dit hoofdstuk beschouwen als een verdieping of uitbreiding van de wiskunde-I-stof over deze onderwerpen.

Tenslotte volgen twee hoofdstukken met toepassingen van de complexe getallen in de natuurkunde. In hoofdstuk 6 worden voor zekere stroomkringen lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde afgeleid en met behulp van de theorie uit hoofdstuk 5 opgelost. In hoofdstuk 7 wordt voor de beweging van een trillende massa een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde opgesteld. Er worden verschillende situaties onderscheiden en er wordt bekeken welke bewegingen zich hierbij voordoen.

Door de opzet van het boek met enkele onafhankelijke hoofdstukken is het mogelijk het boek te behandelen met een *nadruk op structuren.* In dit geval zal men de eerste vier en eventueel nog hoofdstuk 5 doorlopen.
Wil men een nadruk geven op de *toepasbaarheid van de complexe getallen,* dan zal men de hoofdstukken 1, 3, 5 en 6 of 7 kiezen. Het is goed denkbaar, dat de laatste twee hoofdstukken in samenwerking met de natuurkundeleraar doorgewerkt worden'.

Dank zij de verschijning van dit leerboekje over complexe getallen van Freudenthal en Nijdam is mijn vertrouwen op een passende plaats voor dit onderwerp in ons onderwijs groter geworden dan het aanvankelijk was. Het bevat wel het maximum van het voor dit moment bereikbare.
Van harte hoop ik, dat alle docenten in de wiskunde die met het onderwijs in Wiskunde-II zijn belast, met deze IOWO-uitgave kennis zullen maken en dat de auteurs hun ervaringen met dit stuk leerstof te zijner tijd zullen willen publiceren.

Literatuurverwijzingen.

(1). A. Bartels, *Een eeuw middelbaar onderwijs, 1863–1963;* p. 113.
(2). *Euclides 14,* 1937–1938; p. 81.
(3). *Weekblad AVMO 14,* 1917–1918; p. 1636 e.v.
(4). *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* (Euclides 2); p. 113 e.v.
(5). *Weekblad AVMO 20,* 16 april 1924; p. 992 en *Euclides 10,* 1933–1934, p. 133.
(6). *Publicatie van de Wiskundewerkgroep van de WVO,* nr. 3; p. 9; Muusses, Purmerend.
(7). *Euclides 30,* 1954–1955; o.a. p. 171 en p. 189.
(8). Zie ook bijvoorbeeld nog:
J. Versluys, *Beknopt leerboek der algebra,* p. 122–124 over *Imaginaire getallen*; A. Versluys, Amsterdam, 1907[5].
(9). J. Versluys, *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak*; P. Noordhoff, Groningen, 1874; p. 145 en p. 121.

(10). P. Wijdenes en Dr. H. J. E. Beth, *Nieuwe Schoolalgebra*, vierde deel: P. Noordhoff, Groningen, 1930.
Dit deel beleefde geen herdruk, maar werd wel door Wijdenes e.a. in 1960, gesplitst in de deeltjes IVα en IVβ, opnieuw uitgegeven.
Zie voor Beth's opvattingen ook nog zijn artikel in Euclides 5, p. 110 e.v. over *De behandeling van de complexe getallen.*
(11). *Oplossingen van de vraagstukken uit de Beknopte Meetkunde* van P. Wijdenes; p. 8; P. Noordhoff, Groningen.
(12). We verwijzen naar de volgende artikelen uit de tiende jaargang van Euclides:
P. Wijdenes, *i*; p. 1 en p. 143;
J. H. Schogt, *De enquête over i*; p. 133 e.v.;
Prof. G. Mannoury, *Over de bestaanbaarheid van i*; p. 125 e.v.
(13). *Leerplan en eindexamenprogramma voor de Wiskunde*; als discussiestuk uitgegeven brochure ten name van de Vereniging van Leraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmografie (Wimecos); z.j. (1935).
(14). H. A. Derksen en G. L. H. de Laive, *Leerboek der algebra* met vraagstukken, vierde deel; W. J. Thieme, Zutphen, 1899.
(15). G. Papy, *Mathématique Moderne* 6; *Géométrie plane*; Editions Labor et Marcel Didier, Bruxelles, z.j. (1966).
Zie ook het artikel van Dr. R. Holvoet in mijn *Didactische Oriëntatie II*, p. 405 e.v.; Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971[2].
(16). *Annales du Baccalauréat*; Mathématiques, séries C, E; fascicule 2, Année 1968; Librairie Vuibert.

Uit dit deeltje citeren we een dozijn opgaven:

1. Soit, dans le plan complexe, m et M les images des deux nombres suivants:

$$z = x+\mathrm{i}\cdot y \quad \text{et} \quad Z = \frac{z-1}{z+1}$$

a. Mettre le nombre Z sous la forme $X+\mathrm{i}\cdot Y$;
b. Si le point m décrit la droite de l'équation $y = 1-x$, quel est l'ensemble des positions du point M?

2. Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z, tels que le nombre

$$Z = \frac{z-2}{z+1}$$

soit:

a. un nombre réel;
b. un nombre imaginaire pure.

3. *a.* Déterminer le module et l'argument du nombre complexe:

$$z = \frac{1}{1+\mathrm{i}\cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

b. Déterminer les images A et B dans le plan complexe des nombres

$$u = \frac{1}{1+\mathrm{i}\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{1+\mathrm{i}\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{3}\pi}.$$

4. La lettre z désignant un nombre complexe on considère le nombre:

$$u = \frac{z-\mathrm{i}}{z-1}$$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

(a). u est réel;
(b). u est complexe pur;
(c). u a pour argument $-\frac{1}{2}\pi$; (mod 2π);
(d). u a pour module 1.

5. Dans le plan complexe étudiez la transformation définie par:

$$z' = 3z+2i.$$

6. • • •

$$z' = (3+4i)z-4-8i.$$

7. • • •

$$z' = -2iz+5.$$

8. • • •

$$z' = (1+i\sqrt{3})z+3+i\sqrt{3}.$$

9. • • •

$$z' = 2z+1-i.$$

10. Déterminer le nombre complexe z tel que

$$z \cdot \bar{z}+3\ (z-\bar{z}) = 4-3i.$$

11. Mettre sous forme trigonométrique le nombre le nombre complexe:

$$z = 1+i\sqrt{3}$$

Calculer les racines cubiques de z et construire leurs images dans le plan complexe.

12. Déterminer le nombre complexe z de telle façon que les images des nombres

i, z et iz

soient les sommets d'un triangle équilatéral.

(17). Hans Freudenthal en Bert Nijdam, *Complexe getallen*, 64 blz.; Uitgave van het IOWO te Utrecht; z.j.

We wijzen ook nog op een recente behandeling van de complexe getallen die zich vrij nauw aansloot bij de Nederlandse traditie t.a.v. de keuze van de leerstof:
D. Leujes, *Complexe getallen*, 34 blz.; J. Noorduyn en Zn, Gorinchem, 1967.
Het boekje bevat ook een historische inleiding over de ontwikkeling van het getalbegrip.

Stereometrie in de Onderbouw

drs. J. van LINT
Zwolle

Met veel 'heimwee' denk ik vaak terug aan de lessen in de stereometrie van enige jaren geleden. Neen, ik wil zeker geen pleidooi gaan houden voor een terugkeer naar al het 'oude'. Integendeel, nu ik enkele jaren gewerkt heb met de modernere vectormeetkunde, moet ik volledig bekennen, dat het een prachtig stukje wiskunde is, dat mooi in elkaar zit. Leerlingen met weinig ruimte-inzicht kunnen met nauwkeurig rekenwerk menig probleem uit de stereometrie oplossen. Helaas is er echter enige tegenzin te bespeuren in het maken van een tekening, omdat ze die toch niet nodig hebben.
Aangezien ik het met de laatste opmerking niet eens ben en het tekenwerk juist erg belangrijk vind voor het kweken van een zeker ruimte-inzicht, heb ik geprobeerd wat oefeningen te verzinnen, die mogelijk in een vroeg stadium te gebruiken zijn om de leerlingen het nut van het tekenen en misschien ook het plezierige ervan, bij te brengen. Stel dat bekend zijn de begrippen: vector, spiegeling, rotatie, en translatie. Stel verder dat besproken zijn het vermenigvuldigen van een vector met een scalair en het optellen en aftrekken van vectoren m.b.v. het 'kop aan staart leggen'.

Voorbeeld 1

We onderzoeken in de kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ het verschil dat bestaat tussen de optellingen van vectoren in de ruimte, bij verandering van de volgorde van de optelling. Construeer de representant van de vector met staart in *D*, die gelijk is aan:

$\vec{DC} + \vec{DH} + \vec{DA}$ met rood
$\vec{DH} + \vec{DA} + \vec{DC}$ met blauw
$\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DH}$ met groen.

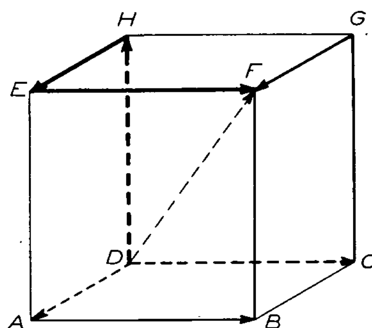


Fig. 1.

Eventueel is een gesprek over de associativiteit van de vectoroptelling uit te lokken door te laten construeren:

$$(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}) + \overrightarrow{DA} \text{ en } \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA}).$$

De verzameling representanten van de vectoren met staart in D stellen we voor door V. We vragen in de volgende voorbeelden telkens naar elementen van V.

Voorbeeld 2
In de kubus is S het midden van AH en Q het midden van AB. Teken in de kubus:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{DB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS};$$

Wat merk je op over de verzameling pijlpunten van: $\vec{v} = \overrightarrow{DB} + \lambda.\ \overrightarrow{AS}$, als $\lambda \in \mathbb{R}$?
Teken in de kubus: $\overrightarrow{DQ} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DQ} + \tfrac{1}{8}AG$, $\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AG}$.
Wat merk je op over de verzameling pijlpunten van: $\vec{w} = \overrightarrow{DQ} + \lambda.\ \overrightarrow{AG}$ als $\lambda \in \mathbb{R}$?

Voorbeeld 3
In de kubus is S het midden van AH en K het midden van CH.
Teken in de kubus:

$$\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{DK} - \overrightarrow{AS},\ \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DK} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS},\ 2\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{AS},\ 2\overrightarrow{DK} - 2\overrightarrow{AS},\ 2\overrightarrow{DK} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS}.$$

Wat merk je op over de verzameling pijlpunten van de vectoren;

$$\vec{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{DK} + \mu \cdot \overrightarrow{AS} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})?$$

Teken in de kubus de verzameling van de pijlpunten W van de elementen van V waarvoor geldt:

$$\vec{v} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS},\ v = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DK},\ v = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DK},$$
$$\vec{v} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{DK},\ v = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{AS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DK},$$
$$\vec{v} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} + 2\overrightarrow{DK}.$$

fig. 2

Zodra een klas het voldoende begrepen heeft kan men ook andersom gaan vragen: hoe moeten λ en μ gekozen worden opdat de pijlpunt van

$$\vec{v} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} + \lambda \cdot \overrightarrow{AS} + \mu\overrightarrow{DK} \text{ gelegen is op } AB\text{? op } BF\text{? op } CF\text{?}$$

Teken tenslotte de doorsnede van de kubus met de verzameling W.
De oefeningen met het tekenen van doorsneden van de kubus met vlakken gegeven door een vectorvoorstelling in een orthonormaal assenstelsel zijn stellig ook de moeite waard. In de vierde klas zou bijvoorbeeld de volgende opgave gemaakt kunnen worden.

Voorbeeld 4
In de kubus is een assenstelsel aangebracht zó dat:

$$D = (0, 0, 0), \quad A = (6, 0, 0), \quad C = (0, 6, 0), \quad H = (0, 0, 6).$$

Teken de doorsneden van de kubus met de vlakken gegeven door:

$$\vec{v} = \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \lambda\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 5
In de kubus is R het midden van BF.
Spiegel viervlak $ERFG$ in het vlak $BCHE$ en spiegel het beeldviervlak nogmaals maar nu in vlak $BCGF$.
Door welke transformatie is het produkt van de 2 spiegelingen te vervangen?

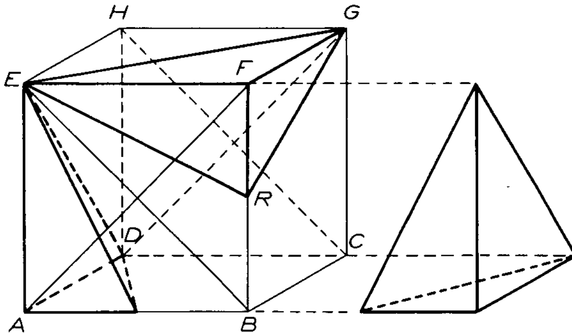


fig. 3

Voorbeeld 6
In de kubus is T het punt gelegen op HG zó dat $HT = \tfrac{1}{4}HG$.
Men trekt een lijnstuk van T naar een punt P van vlak $BCHE$ en verbindt dat punt met F. Construeer P zó dat $TP + PF$ zo klein mogelijk is.

Voorbeeld 7

N is het punt op het verlengde van ribbe GH zó gelegen dat $HN = \frac{1}{2}GH$. Z is het punt op het verlengde van ribbe AB zó gelegen dat $BZ = AB$.
Men trekt een lijnstuk van N naar een punt X van vlak $ADHE$. Van X trekt men daarna een lijn evenwijdig AB naar een punt Y van vlak $BCGF$ en tenslotte trekt men YZ. Construeer de punten X en Y zó dat $NX + XY + YZ$ zo klein mogelijk is.

Vragen

1 Zijn deze opgaven voor leerlingen plezierig?
2 Zijn deze opgaven wel nuttig voor het kweken van ruimte-inzicht?
3 Zijn deze opgaven een goede voorbereiding voor de latere driedimensionale vectormeetkunde?
4 Moeten we er tijd voor vrij maken om zulk soort opgaven in de onderbouw te maken?

Errata in vaardigheden

Door de haast waarmee de publicatie VAARDIGHEDEN moest worden geproduceerd om alle leden van de vereniging nog tijdig vóór de jaarvergadering een exemplaar toe te sturen, zijn er in de tekst een paar storende fouten blijven zitten.
Blz. 5. In de figuur behoren de punten C en D één hokje naar links te staan. De figuur moet dus een ruit zijn met zijden 5. Als men A de coördinaten (0, 0) en B de coördinaten (5, 0) zou geven, dan zouden C en D resp. de coördinaten (8, 4) en (3, 4) moeten krijgen.
Blz. 22. Voorbeeld F: $\frac{4}{2p}\,2p$, moet zijn: $\frac{4}{2p}$
Blz. 33, eerste kolom, regel 17: gevolg, moet zijn: gevolgd
Blz. 37, tweede kolom, regel 11 van onder: Perreren, moet zijn: Parreren
Blz. 39: toevoegen als sleutelwoord:
Oriënteren [1]
[4], hoofdstuk 4
[13], hoofdstuk 5 en ook blz. 124 e.v.
[14], hoofdstuk 3 en daarin vooral paragraaf 3.4.1

Variabelen

T.S. de GROOT

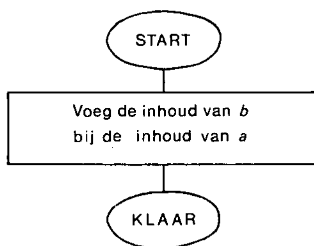
Marum (Gr.)

Een mooie manier om variabelen in te voeren is mij ingegeven door de computerkunde. Het is een zo simpele en vanzelfsprekende manier dat ik ook andere belangstellenden er mee in kennis wil brengen. In een computer worden alle te bewerken getallen opgeborgen in het geheugen en van een adres voorzien. Het adres gaat dan fungeren als variabele. Zo kunnen wij het echter ook doen voor onze leerlingen. Stel ze voor dat alle getallen worden opgeborgen in een immens grote kast. Hun verbeelding is groot genoeg om dat te kunnen bevatten. Hoe groot die denkbeeldige kast ook mag zijn. Ze weten best dat nooit alle getallen tegelijk in een bewerking worden gebruikt. Alle getallen hebben we in laadjes in een kast opgeborgen. We stellen de leerlingen voor om een aantal (denkbeeldige) laadjes uit de (denkbeeldige) kast te pakken. Om deze laadjes van elkaar te onderscheiden plakken we er even een etiket met een naam op. In eerste instantie zijn daarvoor als namen te gebruiken: *aap*, *noot*, *mies* en dergelijke. Het zal dan echt niet zo lang duren voordat u de leerlingen kunt voorstellen om deze namen maar te bekorten tot een enkele letter van het alfabet. Wat ze dan echter bij het gebruik van de letters in hun geheugen hebben staan is: laadje met inhoud. Dat is voor de leerlingen een concrete zaak. Een laadje met een naam een laadje met een inhoud. Een laadje dat gevuld kan zijn en ook gevuld kan worden.
aap + *noot* betekent: tel de inhoud van *noot* bij de inhoud van *aap* op. ab of $a \cdot b$ betekent: vermenigvuldig de inhoud van laadje a met de inhoud van laadje b. Na de afspraken over de schrijfwijze en enige inoefening kan worden overgegaan naar het laten vertalen van: $\frac{a+b}{c-d}, \frac{a}{b+c}, \frac{a-b}{c}$ en dergelijke. Ook de vormen als $\frac{2(a+b)}{3(c-d)}$ kunnen dra worden vertaald en behandeld.
U kunt ze dan substituties laten uitvoeren. Zo in de geest van: stel dat de inhoud van *aap* en *noot* samen 5 is. Wat kan dan de inhoud van *aap* zijn. Of ook: wat is de uitkomst van $a+b$ als 4 de inhoud van a is en 3 de inhoud van b. In een mum van tijd lezen ze vlot ook ingewikkelder formules als:

$$\frac{ab-cd}{ef+gh}$$

Het spreken over de inhoud van laadje a enz. heeft het grote voordeel dat principiële moeilijkheden t.a.v. de substitutie worden overwonnen. De leerlingen krijgen op deze wijze een goede duidelijke indruk van het begrip variabele, ook al is het woord niet gevallen, en tevens staan de letters nog wagenwijd open om inderdaad ingevuld te worden.
Op de duur zullen de uitvoerige omschrijvingen: de inhoud van .... verdwijnen. Op zich is het geen ramp als het niet gebeurt. De betekenis van de letters in de functie $x \rightarrow ax^2+bx+c$ is in geen enkel opzicht anders dan inhouden, welke om vulling vragen. De laadjes kunnen zijn verdwenen, de betekenis is nog hetzelfde.
Een groot voordeel van deze wijze van invoeren zijn de volgende overwegingen:
1 juiste begripsvoorstelling van een variabele
2 bruikbaarheid voor de computerkunde
3 overwinning van de substitutiemoeilijkheden
4 gemakkelijke vertaalmogelijkheid in woorden en omgekeerd.
Tevens wordt een formulering als $a \in \mathbb{Z}$ veel doorzichtiger. Veel leerlingen kunnen daarmee niet uit de voeten. Ze blijven steken in een voor hen niet te vatten situatie. De uitspraak dat a geen element van $\mathbb{Z}$ is, is veel duidelijker voor hen. Kunnen we hen echter vertellen dat a een laadje is in de kast, welke we met $\mathbb{Z}$ aanduiden, dan is dat voor hen een volkomen begrijpelijke zaak, zonder enige tegenspraak. Ze kunnen zich bij a en $\mathbb{Z}$ iets voorstellen.

Ook dacht ik dat het reeds in dit stadium mogelijk was een zinvolle voorbereiding te geven op wat in de computerkunde veelvuldig aan de orde zal komen. Het maken van blokschema's. Dit is stellig niet noodzakelijk. De leerlingen kunnen $a+b$ gewoon vertalen en opschrijven als de inhoud van a gevoegd bij de inhoud van b. Maar het is ook mogelijk de leerlingen op te dragen hiervan een blokschema te maken. Voor de leerlingen geen onaangename en toch wel nuttige bezigheid. Ik ondervind er veel genot van bij de behandeling van de inversie. Langzamerhand kunnen formules en blokschema's worden uitgebreid. Het werken op deze wijze is allerminst abstract en spreekt de leerlingen aan.



Blokschema.

Mij is gebleken dat het werken hiermee vanzelf gaat ook al komen er heel weinig getallenvoorbeelden aan te pas. Zo nu en dan om eens te controleren of het allemaal klopt en bij substituties. Hoe concreter het de leerlingen voor ogen staat, des te gemakkelijker kunnen ze er mee werken.

Statistics by example

G. v. d. LAAN en P. TERLOUW

In dit artikel willen wij een aantal boeken bespreken op een enigszins ongebruikelijke wijze; de boeken zijn:

F. Mosteller e.a., Statistics by example,
dl. I, Exploring Data, xvi + 125 blz.;
dl. II, Weighing Chances, xiv + 145 blz.;
dl. III, Detecting Patterns, x + 166 blz.;
dl. IV, Finding Models, xiv+146 blz.;
Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

De prijs van deze boeken bedraagt ca. *f* 14,00 per deel. De uitvoering is betrekkelijk eenvoudig.

In de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek werkt men bij voorbeelden veelal met dobbelstenen, munten, kaarten, schaakspelen, urnen met ballen, fiches of knikkers, enz.. Slechts zelden vindt men op elementair niveau uitgewerkte voorbeelden uit het dagelijks leven. Het doel van de te bespreken boeken is dan ook om ons van in de praktijk gebruikt cijfermateriaal te voorzien en daarbij op verschillende niveau's de toe te passen statistiek te presenteren; hierbij wordt echter niet gestreefd naar een vervanging van een 'theoretische' cursus, wel naar een aanvulling daarvan. Verder kan men deze boeken zien als een inspiratiebron om andere voorbeelden uit het dagelijks leven te vinden en deze zelf te onderzoeken.

De opeenvolgende delen bevatten resp. 14, 14, 12 en 12 artikelen. Op een enkele uitzondering na zijn deze door verschillende auteurs geschreven, zodat het weinig zinvol is om in kort bestek van dit alles een volledige bespreking te geven. We zullen dan ook slechts een steekproef nemen uit het totaal der artikelen en wel zo dat uit elk deel één artikel zal worden besproken. Wij hopen dat u hiermee enigszins een indruk kan verkrijgen van de boeken, waarbij we de aandacht vestigen op de stijgende moeilijkheidsgraad van de opeenvolgende delen. De schrijvers besteden hieraan eveneens de nodige aandacht door de hieronder volgende voorkennis voor de desbetreffende delen te adviseren:

dl. I: Arithmetic, rates, percentages;
dl. II: Notion of probability, elementary algebra;
dl. III: Elementary probability, intermediate algebra;
dl. IV: Idem deel III.

Wij achten het mogelijk om in statistieklessen één of meer artikelen uit deel I te bespreken bij praktisch alle schooltypen van voortgezet onderwijs. Uit deel II kan men zonder meer putten voor havo en vwo, terwijl op de mavo zeker ook

nog enkele artikelen besproken kunnen worden. De delen III en IV leveren uitstekend materiaal voor het vwo, echter een enkel artikel kan eveneens op het havo worden gebruikt. Na deze inleiding volgt dan nu onze steekproef.

dl. I, *W. H. Kruskal, The Cost of Eating, blz.* 79–86.
Een wel zeer actueel onderwerp, waarmee we wekelijks, zo niet dagelijks, geconfronteerd worden. Men denke bijvoorbeeld aan de kranterubriek 'Prijswijzer'. In dit artikel wordt voornamelijk ingegaan op de problemen, die ontstaan bij de prijsvergelijking van een bepaald boodschappenpakket gekocht in verschillende supermarkten, zoals: hoe wordt een 'gemiddeld boodschappenpakket' verkregen; hoe te handelen als een bepaald artikel in een winkel uitsluitend per drie stuks verkocht wordt en wat te doen als een artikel niet in een bepaalde supermarkt verkocht wordt. Uiteraard wordt dit besproken aan de hand van voorbeelden, o.a. een grote tabel waarin 9 supermarkten worden beschouwd. Dat zo'n gemiddeld boodschappenpakket zeer belangrijk is, wordt aangetoond door diverse boodschappenpakketten samen te stellen, waarbij verschillende supermarkten het voordeligst blijken te zijn. Concluderend kunnen we zeggen, dat het artikel vooral de analyse van het probleem benadrukt om daarna met beschrijvende statistiek tot beschouwingen over te gaan, waarbij dan weer voorzichtigheid wordt betracht met het trekken van conclusies. Het artikel bevat tevens nog enige opgaven en een aanzet tot een klein project.

dl. II, *J. Sedransk, Prediction of Election Results from Early Returns, blz.* 121–128.
In elk land worden bij het naderen van verkiezingen enquêtes gehouden en met behulp daarvan geeft men prognoses voor de einduitslag. Ook op de avond van de verkiezingsdag houden radio en TV zich bezig met het voorspellen (schatten) van die uitslag. In dit artikel wordt aangegeven hoe men op elk tijdstip van de verkiezingsavond op grond van de dan binnenzijnde uitslagen een nauwkeurige schatting tracht te geven van de einduitslag. Het artikel beperkt zich tot één staat, waarbij twee kandidaten (van partij A en partij B) dingen naar de gunst van de kiezer. De staat is verdeeld in steden en deze zijn onderverdeeld in kiesdistricten.
Op elk tijdstip t van de verkiezingsavond zijn de volgende gegevens bekend:
1 Het aantal kiesdistricten waarvan de uitslag bekend is;
2 het totaal aantal uitgebrachte stemmen d op de kandidaat van partij A in deze kiesdistricten;
3 het totaal aantal uitgebrachte stemmen w in deze kiesdistricten.
Men wil nu op elk tijdstip t een schatting geven van het uiteindelijk aantal stemmen, dat A heeft verkregen. De auteur deelt daartoe de steden in naar grootte en naar stemgedrag bij eerder gehouden verkiezingen. Er wordt verondersteld dat steden die in dezelfde klasse zijn ingedeeld nu een overeenkomstig stemgedrag zullen vertonen. In het artikel worden twee schatters gegeven en wel:

$$1)\ \hat{p}_u = d/w \text{ en } 2)\ \hat{p}_s = (\sum N_k \cdot \bar{d}_k)/(\sum N_k \cdot \bar{w}_k),$$

waarbij $\sum$ een sommatie over alle klassen betekent en N_k het aantal kiesdistricten in de k-de klasse is. Het aantal uitgebrachte stemmen op kandidaat A binnengekomen op t uit klasse k is d_k; w_k is het totaal aantal uitgebrachte stemmen op t in k; n_k is het aantal kiesdistricten uit k waarvan ten tijde t de uitslag bekend is, terwijl verder $\bar{d}_k = d_k/n_k$ en $\bar{w}_k = w_k/n_k$. Aan de hand van een voorbeeld weet de auteur de formule van $\hat{p}_s$ aannemelijk te maken. Het verschil is duidelijk. Bij $\hat{p}_u$ is aangenomen dat in de kiesdistricten, waarvan de uitslag nog moet binnenkomen, net zo gestemd is als in de kiesdistricten waarvan de uitslag bekend is. Bij $\hat{p}_s$ zijn aan de binnenzijnde uitslagen gewichten toegekend die afhankelijk zijn van het aantal kiesdistricten binnen een klasse, waarbij het ons echter vreemd voorkomt dat blijkbaar aangenomen wordt dat het aantal stemmen in elk kiesdistrict binnen een klasse gelijk is. Een betere schatter lijkt ons $\hat{p}_{s'} = \sum N_k \cdot \bar{d}_k/\bar{w}_k = \sum N_k \cdot d_k/w_k$. De auteur demonstreert de resultaten van de beide door hem gegeven schatters aan de hand van een verkiezing van een gouverneur in de Amerikaanse staat Iowa. Hierin komt duidelijk naar voren dat $\hat{p}_s$ sneller dan $\hat{p}_u$ naar het uiteindelijke resultaat convergeert en dat de variatie van $\hat{p}_u$ groter is dan die van $\hat{p}_s$. De auteur concludeert dat $\hat{p}_s$ een betere schatter is dan $\hat{p}_u$. De stelligheid waarmee dit in het artikel gebeurt, gaat o.i. iets te ver, maar hierbij geldt als excuus voor de auteur dat het doel van de boekenserie in eerste instantie niet is te trekken conclusies met bewijzen te staven, maar deze m.b.v. voorbeelden aannemelijk te maken. In ieder geval wordt duidelijk gemaakt dat men de verkiezingsuitslag van enkele kiesdistricten niet kan zien als einduitslag, maar dat er slechts met gebruikmaking van gewichten de mogelijkheid wordt verkregen om een enigszins betrouwbare prognose te geven.

dl. III, *I. Francis and W. H. Kruskal, Sensitive Fingers and Defective TV Tubes, blz.* 63–73.

In dit artikel wordt nagegaan of het voorkomen van twee simultane gebeurtenissen het gevolg is van een 'aantoonbare' relatie tussen deze gebeurtenissen of enkel op toeval berust. Dit wordt gedaan aan de hand van diverse voorbeelden, waarbij in alle gevallen de hypergeometrische verdeling te voorschijn komt.

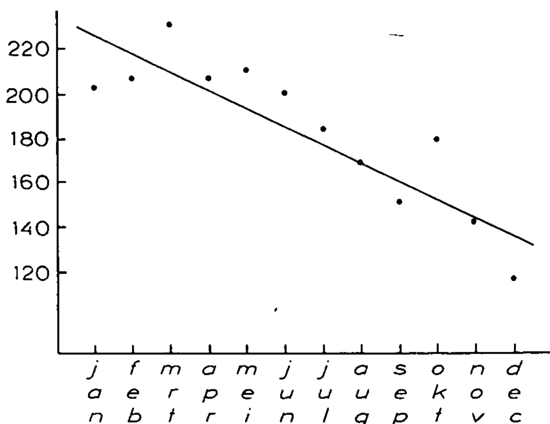
Het eerste voorbeeld handelt over kleurgevoeligheid van vingers. Zestien blauwe en vier rode kaarten worden geschud. De kans dat een proefpersoon bij trekking van vier kaarten juist vier rode trekt is $\frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{17}$ (= 0,00021). Er wordt opgemerkt dat deze kans ook kan worden berekend m.b.v. de binomiaal coëfficiënt, waarna op duidelijke wijze aannemelijk wordt gemaakt dat de kans om bij trekking van vier kaarten r rode te trekken gelijk is aan $\binom{4}{r} \cdot \binom{16}{4-r} \Big/ \binom{20}{4}$. Na het berekenen van de kansen om bij trekking van vier kaarten uit twintig 0, 1, 2, 3 of 4 rode kaarten te trekken wordt geconcludeerd bij het verschijnen van drie of vier rode kaarten bij zo'n trekking *mogelijk* sprake is van kleurgevoeligheid van de vingers.

In het tweede voorbeeld wordt de kans berekend dat de kwaliteit van een partij goederen zodanig is, dat deze kan worden geaccepteerd. Stel dat er van twintig TV-buizen vier defect zijn. Van deze twintig worden er vier geïnspec-

teerd. Dan is de kans dat er nul defect zijn gelijk aan $\binom{4}{0}\cdot\binom{16}{4-0}\Big/\binom{20}{4}$ (= 0,38). Naar aanleiding hiervan wordt aan de vraag 'Welk aantal defecten vindt men nog toelaatbaar bij een bepaalde steekproefgrootte om de partij te accepteren?' in het artikel enige aandacht besteed. Bij een algemene beschouwing vindt men dat de kans als er k defecte buizen in een verzameling van N buizen zijn, op r defecte buizen bij een steekproef ter grootte n gelijk is aan $\binom{k}{r}\cdot\binom{N-k}{n-r}\Big/\binom{N}{n}$. Een verzameling van dergelijke kansen met $r = 0, 1, \ldots,$ min (k, n) heet een hypergeometrische verdeling.
De berekeningen bij beide voorbeelden verlopen analoog, echter in de praktijk is er een belangrijk verschil, immers dan is het aantal defecte TV-buizen onbekend, terwijl het aantal rode kaarten wel bekend is. Deze beide aantallen komen overeen met het symbool k uit de voorafgaande alinea.
Aan het slot van het artikel vinden we nog enkele voorbeelden waarbij de hypergeometrische verdeling kan worden toegepast, o.a. bij het onderzoek van een mogelijk verband tussen die landen waarbij de economie het snelst groeit en welke het sterkst geïndustrialiseerd zijn. Het artikel geeft een goed inzicht in problemen, waarbij men de hypergeometrische verdeling kan gebruiken.

dl. IV, *S. E. Fienberg, Randomization for the Selective Service Draft Lotteries, blz.* 1–13.
In 1970 had men in Amerika een overschot aan mannen, die in militaire dienst moesten en dientengevolge was het noodzakelijk een aantal van hen uit te loten. Men heeft daarbij gebruik gemaakt van de volgende procedure. De selectie geschiedde m.b.v. een rij geboortedata, d.w.z. als 8 april de eerste in die rij was, dan werden de mannen, die op die dag geboren waren het eerst voor de militaire dienst gekozen; was 16 november de tweede, dan leverde die datum de volgende manschappen, enz.. Hiermee werd net zo lang doorgegaan, totdat voldoende mannen verkregen waren. Om deze procedure uit te voeren diende men data aan getallen te koppelen, hetgeen op de volgende wijze geschiedde. De 366 geboortedata werden genoteerd op reepjes papier en in 366 cilindrische capsules gedaan. De 31 capsules voor januari werden in een doos gedaan, waarna de 29 voor februari werden toegevoegd, enz.. De doos werd verscheidene malen geschud en daarna geledigd in een grote goudvissenkom. De eerste datum (14 september), die getrokken werd kreeg nummer 1; de tweede (24 april) nummer 2, zo doorgaande t/m 366. Met de verkregen gegevens toont de schrijver op verschillende wijzen aan, dat deze procedure *niet* random is. Men vergelijke daartoe bijvoorbeeld de uit het artikel overgenomen figuur (X-as: maand van het jaar; Y-as: gemiddeld getrokken nummer).

Verder merkt de schrijver op, dat vele mensen destijds terecht geprotesteerd hebben tegen deze onjuiste procedure met het gevolg, dat men in 1971 het geheel aanzienlijk verbeterd heeft. De tabel van dat jaar is ook afgedrukt en de lezer wordt verzocht deze te onderzoeken m.b.v. de gegeven methoden, die bij de behandeling van het '1970-probleem' ten tonele zijn gevoerd. Tenslotte



merken we nog op, dat het onderzoek voornamelijk berust op het gebruik van een χ^2-toets.

Slot

Wij bevelen een ieder van harte aan eens kennis te nemen van tenminste één der delen en hopen met dit artikel onze aanbeveling enigszins gemotiveerd te hebben. Om de prijs hoeft u het in ieder geval niet te laten.

In Euclides 1975/1976 Nr. 3 is het nieuwe programma voor de examens wiskunde M.O.A. en M.O.B. gepubliceerd.

In aansluiting hierop wordt meegedeeld dat dit nieuwe programma ingaat op *1 januari 1978*. Tot die datum wordt *uitsluitend* volgens het *oude* programma geëxamineerd. Een overgangsregeling maakt het echter mogelijk om ook na die datum, echter slechts tot 1 januari 1981, nog het examen 'oude stijl' af te leggen, indien men dit verkiest boven het examen nieuwe stijl. Na *1 januari 1981* is *uitsluitend* examen *nieuwe* stijl mogelijk.
Nadere regeling van de deelexamens wordt nog bekendgemaakt.

De voorzitter van de examencommissie Wiskunde M.O.
Dr. A. W. Grootendorst

American host program voor Nederlandse leerkrachten

Het Nederland-Amerika Instituut deelt mede, dat de American Host Foundation, Inc., te New York, voor de zomer 1976 met zijn AMERICAN HOST PROGRAM wederom de gelegenheid biedt tot kennismaking met het Amerikaanse leven aan een groot aantal Nederlandse leerkrachten, in de vorm van een gastvrij verblijf van één maand in de Verenigde Staten.
De deelnemers gaan per vliegtuig naar New York, waar men twee à drie dagen verblijft. Daarna logeert men vier weken bij een of twee Amerikaanse gezinnen. In 1976 viert men overal in de V.S. het 200-jarige bestaan van dit land als een republiek.
Voorlopige vertrekdata:
Groep I – 29 juni 1976 naar New York, 31 juli 1976 uit New York
Groep II – 13 juli 1976 naar New York, 14 augustus 1976 uit New York
Groep III – 3 augustus 1976 naar New York, 4 september 1976 uit New York
De aan het programma verbonden kosten variëren al naar gelang het gedeelte van de Verenigde Staten, waaraan men de voorkeur geeft:

a.	het Oostelijke gedeelte	\$619
b.	het Middenwesten en/of het Zuiden	\$789
c.	het Westen	\$939

Deze bedragen dekken alle kosten (inklusief het verblijf in New York), behalve zakgeld (± \$250).
Nadere inlichtingen en formulieren betreffende dit programma kunnen tot ±28 februari 1976 worden aangevraagd bij het:

NEDERLAND-AMERIKA INSTITUUT
Afdeling Studievoorlichting
Prinsengracht 919, Amsterdam
Telefoon: 020-239425

I.O.W.O.

Ter gelegenheid van de zeventigste verjaardag van prof. dr. H. Freudenthal is door het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht, in samenwerking met het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs, een 'feestboek' samengesteld.
Dit boek bevat naast citaten uit artikelen over en van prof. Freudenthal, een door hem voor zijn kinderen en kleinkinderen geschreven verhaal.
Voor belangstellenden is bij het IOWO, Tiberdreef 4 te Utrecht (030-611611) tegen vergoeding van *f* 20,– een exemplaar van dit boek beschikbaar.

Het Belgische tijdschrift

De abonnees op Wiskunde en Onderwijs, het tijdschrift van de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars, wordt verzocht hun abonnement over het jaar 1976 te voldoen door storting van *f* 15,– op giro 933434 ten name van de penningmeester van Euclides te Doorwerth. Graag voor 20 december a.s.
Men kan zich als nieuw abonnee opgeven door het bedrag te storten en op de strook te vermelden: nieuw abonnee.
Het tijdschrift verschijnt vijf keer per jaar.
Ik hoop dat velen het werk van onze jonge zustervereniging willen aanmoedigen door een abonnement op het tijdschrift te nemen.

P. G. J. Vredenduin

Wintersymposium wiskundig genootschap

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op zaterdag *3 januari 1976* in een der lokalen van Ubbo Emmius in de Martinihal, Leonard Springerlaan 6 te Groningen.

Als thema is gekozen: *Differentiaalvergelijkingen.*
Het programma luidt als volgt:

10.00–10.30 u. Aankomst en koffie.
10.30–11.30 u. Prof. Dr. F. Takens:
Kwalitatieve theorie van differentiaalvergelijkingen.
11.45–12.45 u. Prof. Dr. P. J. van der Houwen:
Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen.
12.45–14.00 u. Lunch.
14.00–15.00 u. Prof. Dr. E. M. d Jager:
Differentiaalvergelijkingen in de toegepaste wiskunde.

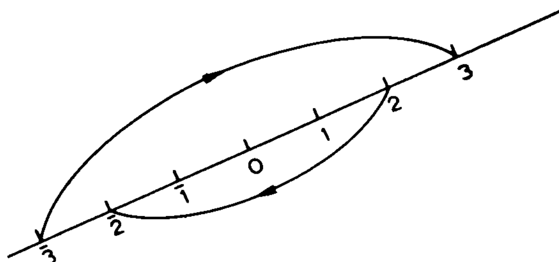
Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom.
I.v.m. de te reserveren plaatsruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen verzocht, hiervan zo spoedig mogelijk bericht te geven aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14 te Hoogezand (tel. 05980-3516) en tevens te vermelden of hij aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen. De kosten voor de lunch ten bedrage van *f* 6,– gelieve men te storten op postrekening 934943 t.n.v. Drs. A. M. Koldijk te Hoogezand, of ter plaatse te voldoen. Voor deelname aan de lunch is opgave tevoren *noodzakelijk.*

De Martinihal is te voet van het hoofdstation in 15 minuten te bereiken: het station verlaten via de trap naar het viaduct (bij de sporen 1a en 35), op het viaduct linksaf, beneden rechtsaf Parkweg, dan linksaf Paterwoldseweg, waarna men de Martinihal gemakkelijk vindt. De ingang van Ubbo Emmius is duidelijk aangegeven. Per bus: lijn 3 nemen vóór het station.

Boekbespreking

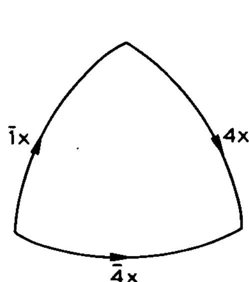
Frédérique, *Les enfants et la mathématique 3*, Marcel Didier, Bruxelles–Montréal–Paris, 1972, VI + 584 blz.

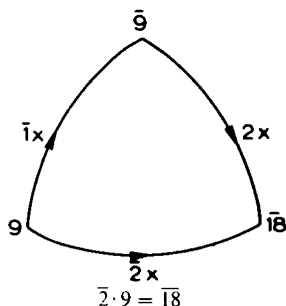
Deel 1 is besproken in Euclides *46* (1970–71), p. 194 en deel 2 in Euclides *48* (1972–73), p. 72.
In dit deel is de stof weergegeven die door Frédérique (mevrouw Papy) behandeld is in de derde klas van de basisschool. Bekijkt men de inhoudsopgave, dan krijgt men de indruk te maken te hebben met een 'echt' wiskundeboek.
Achtereenvolgens komen aan de orde onder meer:
rekenen met gehele getallen, het rationale getal;
een uitvoerige beschouwing over relaties waarbij veelvuldig van pijldiagrammen gebruik gemaakt wordt, de functie als bijzonder geval van een relatie, inverse en samenstelling, reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit;
combinatoriek: produkt van twee verzamelingen, bomen, aantal afbeeldingen van A in B, permutaties;
oplossen van vergelijkingen;
verzamelingenleer: venn-diagrammen, doorsnede, vereniging, verschil ($A \backslash B$), symmetrisch verschil ($A \triangle B$), inclusie, waardetabellen (ook van $A \subset B$, uitgelegd volgens de methode van Dienes);
logica: $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, kwantoren, distributieve wetten en zelfs bijv. $\neg \forall x \in A$: x is een leeuw $\Leftrightarrow \exists x \in A$: x is geen leeuw – en – $\neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$ (uitgelegd en ten slotte op deze manier symbolisch weergegeven);
meetkunde: evenwijdigheid en loodrechte stand, waarbij datgene toegepast wordt wat in het hoofdstuk over relaties geleerd is, ekwipollentie, convexiteit, afstand en taxiafstand, de cirkel, lengte, oppervlakte en inhoud;
groepoïden, zoals de getalverzameling die uitgaande van 3 en 5 gegenereerd wordt door de operatie + resp. – ;
rekenen modulo n;
isomorfie van $\mathbb{N}$, + en $2^{\mathbb{N}}$, · en invoering van de negatieve gehele exponenten.
Al deze onderwerpen zijn in de concrete sfeer gehouden. De behandeling is natuurlijk aangepast aan het bevattingsvermogen van kinderen van 8 à 9 jaar. Dus geen expliciete formulering van algemeenheden, maar wel series gelijksoortige voorbeelden.
Het kind leert aan de hand van voorbeelden een bepaalde methode begrijpen en past die dan toe op analoge voorbeelden. Regels worden daarbij niet opgesteld. Of, om met Van Hiele te spreken, we blijven op het eerste niveau. Maar duidelijk ligt als doel van de behandelingswijze in het verschiet de overgang naar het tweede niveau te vergemakkelijken. Het kind wordt voorbereid op het wiskundig begrijpen en handelen.
Een paar grepen uit de inhoud om dit te illustreren.
a. Rekenen met gehele getallen.
In deel 1 en 2 heeft de leerling al kennis gemaakt met de natuurlijke en met de negatieve gehele getallen. Het optellen van deze getallen is al getraind. Nu gaan we verder.
Het tegengestelde. De betekenis van het tegengestelde wordt geïllustreerd door onderstaande figuur.



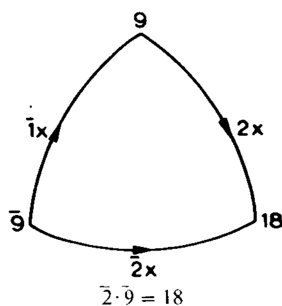
Voorbeelden van deze toevoeging:
$7 \rightarrow \overline{7}$
$\overline{13} \rightarrow 13$
$\overline{9}+6 \rightarrow 9+\overline{6}$
We schrijven:
$-7 = \overline{7}$
$-\overline{13} = 13$
Deze laatste twee regels leren ons meteen hoe we een aftrekking kunnen uitvoeren. Ze stellen ons in staat elke aftrekking om te vormen in een optelling, aldus:
$7-10 = 7+\overline{10}$
$7-\overline{10} = 7+10$
$-8+5 = \overline{8}+5$
$-\overline{4}-3 = 4+\overline{3}$
Ten slotte de vermenigvuldiging.
$6 \cdot \overline{3} = \overline{3}+\overline{3}+\overline{3}+\overline{3}+\overline{3}+\overline{3}$

Vermenigvuldigen met $\overline{1}$ is hetzelfde als het nemen van het tegengestelde, dus $\overline{1} \cdot 4 = \overline{4}$.
De volgende figuren maken duidelijk, hoe met een ander negatief getal vermenigvuldigd wordt.



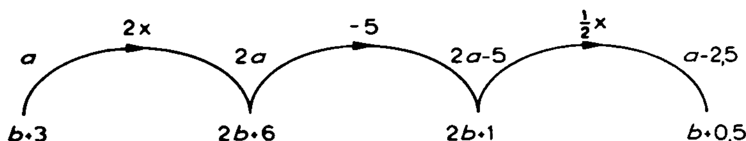


$\overline{2} \cdot 9 = \overline{18}$

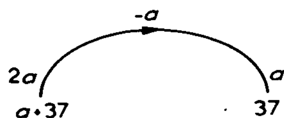


$\overline{2} \cdot \overline{9} = 18$

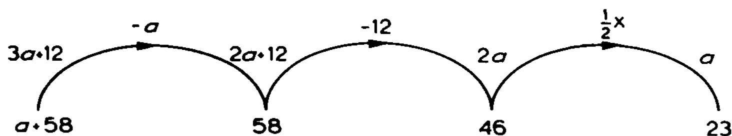
b. Het oplossen van een eerstegraads vergelijking met één veranderlijke.
Voorbereiding.



Dus:
$a = b+3 \Leftrightarrow 2a = 2b+6 \Leftrightarrow 2a-5 = 2b+1 \Leftrightarrow a-2{,}5 = b+0{,}5$.
Opmerking van een leerling: Madame, ce serait plus amusant de trouver *a*.
De volgende figuren maken duidelijk, hoe dit geschiedt.

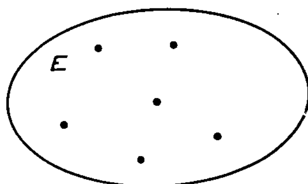


$2a = a + 37 \Leftrightarrow a = 37$

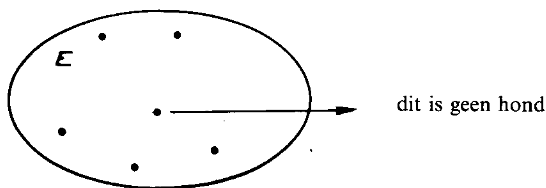


$3a + 12 = a + 58 \Leftrightarrow 2a + 12 = 58 \Leftrightarrow 2a = 46 \Leftrightarrow a = 23$

c. De ontkenning van: alle elementen van E zijn honden.
Nebucadnezar tekent de verzameling E:



en zegt: elk element van E is een hond. Maar N. is een grappemaker; het is niet waar. Wat volgt hieruit?
Na enkele foute antwoorden komt er: er is er minstens één die geen hond is.
Dus bijv.



Er kunnen er meer zijn.

Men ziet uit deze voorbeelden, dat het Frédérique aan stoutmoedigheid niet ontbreekt. Haar grote didactische gaven maken het haar mogelijk met jonge kinderen resultaten te bereiken die voor velen onbereikbaar zullen zijn. Het is interessant daarvan kennis te nemen.
Al met al: een formidabel stuk werk.

P. G. J. Vredenduin

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

337. Een herhalingscombinatie van 6 elementen uit de verzameling {a, b, c, d} is bijv. a, a, a, c, c, d. Wat is het nu precies?
Een combinatie van k uit n elementen in een deelverzameling van een verzameling met n elementen, die zelf k elementen bevat. Maar een herhalingscombinatie is geen verzameling, want een verzameling kan niet een bepaald element meer dan één keer bevatten. Evenmin als bijv. een stelsel vectoren (waarvan men het al of niet afhankelijk zijn wil onderzoeken) een verzmeling is, want tot het stelsel kunnen twee of meer gelijke vectoren behoren. We kunnen ons er dan uitredden door een stelsel van n vectoren te beschouwen als een geordend n-tal. De ordening is wel niet relevant, maar ze doet ook geen kwaad en ten gevolge van de ordening kunnen gelijke vectoren optreden. Ook deze uitweg helpt ons niet bij een herhalingscombinatie, want zodra we geordende zestallen gaan beschouwen i.p.v. ongeordende, wordt het aantal herhalingscombinaties plots veel groter. De vraag is, wat dan wel?

338. Ditmaal een doorzichtige nieuwjaarswens van de heer Kootstra. Doorzichtig in die zin, dat 1976 niet het antwoord, maar het gegeven getal is. Maar dat is dan ook het enige dat er doorzichtig aan is.
Met behulp van alleen maar cijfers 4 kunt u talrijke natuurlijke getallen maken, zelfs alle. Als je maar delen en optellen mag. Nu mogen we niet alleen delen en optellen, maar ook aftrekken, vermenigvuldigen, machtsverheffen, worteltrekken en de faculteit nemen.
Gevraagd wordt onder deze condities het getal 1976 met een minimaal aantal vieren te schrijven. Natuurlijk mag 44 ook.
Het zal niet zo lang duren of u is erin geslaagd 1976 met behulp van zes vieren te schrijven. Maar dan begint de ellende eerst. Want het kan met minder.

oplossingen

335. Iemand heeft een stapel kaarten van boven naar beneden genummerd 1 tot en met n. Hij gooit er telkens p weg ($p \leqq 9$) en legt de volgende kaart onderop de stapel. Ten slotte houdt hij 1 kaart over en daarop staat het getal 1976. Gevraagd p en n. We schrijven 1976 in het $p+1$-tallig stelsel. De dan verkregen schrijfwijze moet op een 0 eindigen. De delers van 1976 die kleiner dan of gelijk aan 10 zijn, zijn alleen 4 en 2. Dus $p = 3$ of $p = 1$.
Kies $p = 3$. Men blijkt dat geen oplossing te vinden.

Kies $p = 1$. $1976 = 11110111000$ (tweetallig). De algoritme in tegengestelde richting uitgevoerd levert $n = 11111011100$ (tweetallig). Dus $n = 2012$.
En nu maakt u nieuwjaarskaarten: ik heb een stapel kaarten genummerd 1 tot en met 2012, gooi de bovenste weg, leg de volgende onderop en ga steeds door, totdat ik u ten slotten een gelukkige laatste kaart wens.

336. Gevraagd werd een samenstel van (scharnierende) veelhoeken te ontwerpen dat stabiel is en waarin relatief zo min mogelijk driehoeken voorkomen. De configuratie uit fig. 1 is stabiel.

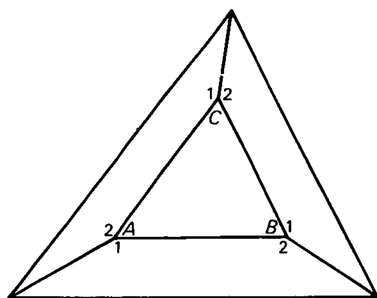
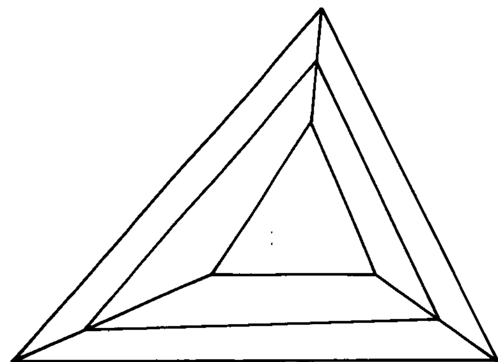


Fig. 1

Probeer maar te deformeren. Dan blijven onveranderd de 12 zijden van de drie vierhoeken. En bovendien: $\angle A_1 + \angle A_2$, $\angle B_1 + \angle B_2$, $\angle C_1 + \angle C_2$. In totaal zijn dit 15 elementen of sommen van elementen. Drie vierhoeken zijn door 15 gegevens bepaald (of beter gezegd: de 15 gegevens laten slechts een eindig aantal mogelijke drietallen vierhoeken toe). Tenzij ze afhankelijk zijn, maar men kan aantonen dat ze dat niet zijn. Dus is geen deformatie mogelijk.
Nu kunnen we figuur 1 uitbouwen tot figuur 2, die om dezelfde reden stabiel is.


Fig. 2

Dit proces kan men voortzetten.
Conclusie. Men kan volstaan met één driehoek. Het aantal vierhoeken kan men onbegrensd groot nemen. Een relatief minimaal aantal driehoeken is dus niet mogelijk.
Opmerking verdient dat het essentieel is, dat we vierhoeken toevoegen. Zodra veelhoeken met meer dan vier zijden toegevoegd worden, wordt deformatie mogelijk.

INHOUD